TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

1. COSA SI INTENDE PER "TRASFORMAZIONE PIANA"

Si dice "**trasformazione geometrica piana**", o brevemente "trasformazione piana",
una corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso, ossia una corrispondenza nella quale

♪ **ad ogni punto del piano corrisponde uno e un solo altro punto del piano**

♫ **e, viceversa, ogni punto è il corrispondente di uno e un solo altro punto.**

❑ **Esempio 1**

Definiremo ora una corrispondenza fra punti del piano, che verrà chiamata "omotetìa"
(nel seguito ometteremo l'accento).

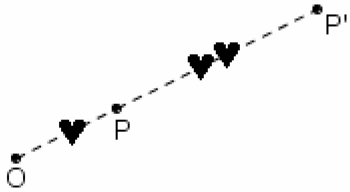
Un'omotetia è caratterizzata da un "**centro di omotetia**" e da un "**rapporto di omotetia**".

Vediamo di cosa si tratta, considerando, per meglio fissare le idee, un caso particolare:
supporremo che il rapporto di omotetia, che indicheremo con *k*, sia uguale a 3.

Sia O un punto fissato del piano.
L'omotetia di centro O e rapporto *k*=3
fa corrispondere (vedi figura)
ad ogni punto P del piano
quel punto P' del piano, tale che:

I. **P' sta sulla semiretta OP;**

II. **$OP' = 3OP$**



E' evidente che
in questo modo risulta definita una "corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso":
infatti

♪ ad ogni punto del piano resta associato uno ed un solo altro punto;

♫ e viceversa, ogni punto del piano potrà essere "visto" come il corrispondente di uno ed un sol punto.

Quindi siamo in presenza di una "trasformazione geometrica piana".

Diremo che

P' è "il corrispondente" di P, o anche "l'immagine" di P,
attraverso la trasformazione considerata

e, **se indichiamo tale trasformazione con *t***, potremo scrivere

$\mathbf{P' = \mathit{t}(P)}$ (leggi: " P' è uguale a *t* di P ")

oppure

$\mathbf{P} \xrightarrow{t} \mathbf{P'}$ (leggi: " *t* fa passare da P a P' ", oppure: " P' è l'immagine di P attraverso la *t* ")

Il punto P, a sua volta, verrà detto "la controimmagine" di P'.

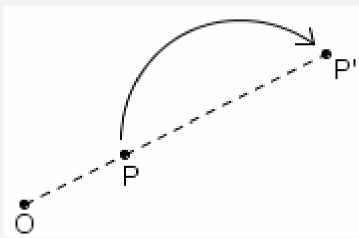
Quando si vuole affermare che *t* fa corrispondere al punto P, il punto P',
si adopera spesso una locuzione suggestiva:
si dice che ***t* "muta" P in P'**, oppure **"trasforma" P in P'**.

Dal punto di vista psicologico, ciò equivale a:

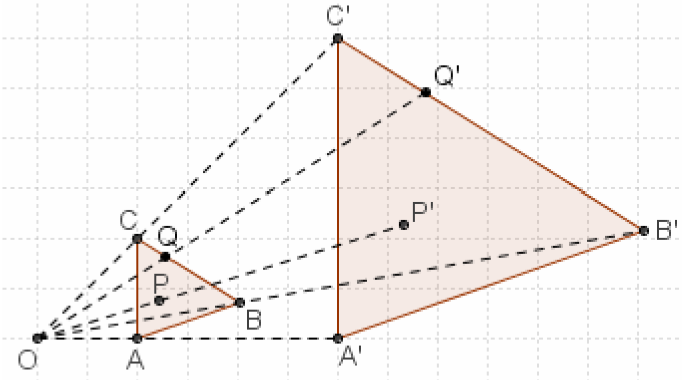
a) partire dal punto P
b) applicare la funzione *t*
c) e poi andare a considerare l'immagine P' "dimenticandosi" del punto P iniziale.

Nella nostra mente, ora, non c'è più P, c'è invece P':
P "è diventato" P', "si è trasformato in" P'…

La questione, però, è *soltanto psicologica*.
In realtà, il punto P è rimasto al suo posto,
e abbiamo semplicemente stabilito di *fargli corrispondere* P',
come se una freccia partisse da P e avesse la sua punta in P'.



Prendiamo ora un triangolo ABC, disegniamo innanzitutto le immagini A', B', C' dei suoi tre vertici attraverso la solita omotetia di centro O e rapporto 3, e costruiamo la figura costituita da tutti i punti che corrispondono ai punti *del lato BC* (brevemente: la figura costituita da tutte le immagini dei punti di BC).



Si constata, e si potrebbe dimostrare in modo rigoroso, che le immagini dei punti del segmento BC costituiscono, nel loro insieme, ancora un segmento, e precisamente il segmento $B'C'$, ossia quello avente per estremi il punto B' (che è l'immagine di B) e il punto C' (che è l'immagine di C).

Si dice, brevemente, che " l'immagine del segmento BC è il segmento $B'C'$ ", e si può scrivere
$\boldsymbol{t}(\mathbf{BC}) = \mathbf{B'C'}$.

Analogamente,
l'immagine del segmento AB non è altro che il segmento $A'B'$,
e l'immagine del segmento AC coincide col segmento $A'C'$.
Insomma, la nostra omotetia **"trasforma segmenti in segmenti"**!

Prendendo poi un punto P che sia interno al triangolo ABC,
la sua immagine P' starà internamente al triangolo $A'B'C'$,
e complessivamente
l'insieme dei punti interni ad ABC risulta avere come immagine l'insieme dei punti interni ad $A'B'C'$.

In definitiva, si vede che questa corrispondenza **"trasforma" il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$**.

Si potrebbe provare che il "nuovo" triangolo è *simile* al "vecchio",
con perimetro triplo e area che è 9 volte l'area del triangolo iniziale.

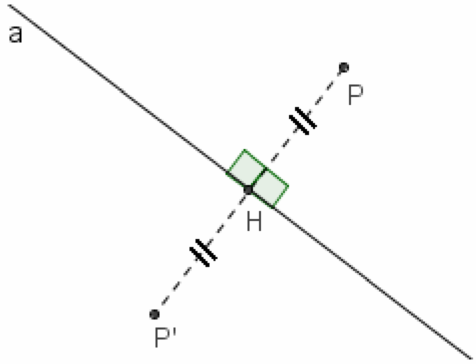
Per significare che
" l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC, costituisce il triangolo $A'B'C'$ "
si può scrivere
$\boldsymbol{t}(\mathbf{ABC}) = \mathbf{A'B'C'}$
e dire, appunto, che la *t* «trasforma il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$».

Cliccando su questa freccia ⇨,
potrai vedere una bella figura dinamica GEOGEBRA
(*grazie* al creatore di questo fantastico *freeware*, l'austriaco Marcus Hohenwarter!)
che mostra all'opera un'omotetia il cui centro e il cui rapporto possono essere fissati dall'utente.
E' possibile pure scegliere di far sì che il rapporto di omotetia k sia <0.
Delle omotetie con rapporto negativo, comunque, ci occuperemo più avanti.

❑ **Esempio 2**

Un altro bell'esempio di trasformazione piana è la "**simmetria assiale**".

Sia a una retta fissata su di un piano.
Si dice "simmetria assiale di asse a" quella corrispondenza (vedi figura) **che ad ogni punto P del piano fa corrispondere quell'altro punto P' ottenuto tracciando da P la perpendicolare PH alla retta a, e prolungando il segmento PH di un segmento $HP' = PH$.**

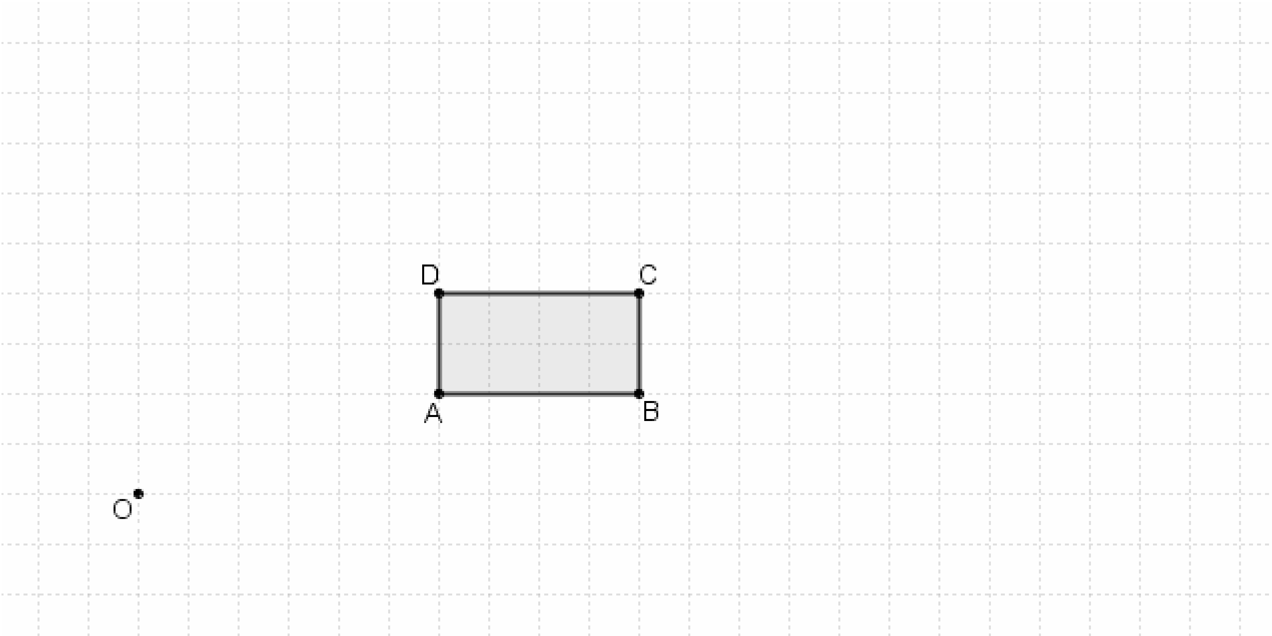


Cliccando su questa freccia ⇨, ecco una figura GEOGEBRA per vedere all'opera una simmetria assiale.
In particolare, trascinando col mouse il punto Q della figura, che è vincolato a restare sul contorno di ABC, constaterai come anche in questo caso la trasformazione "muti segmenti in segmenti".

ESERCIZI

1) Considera l'omotetia avente per centro il punto O della figura sottostante, e rapporto $k = 1/2$.

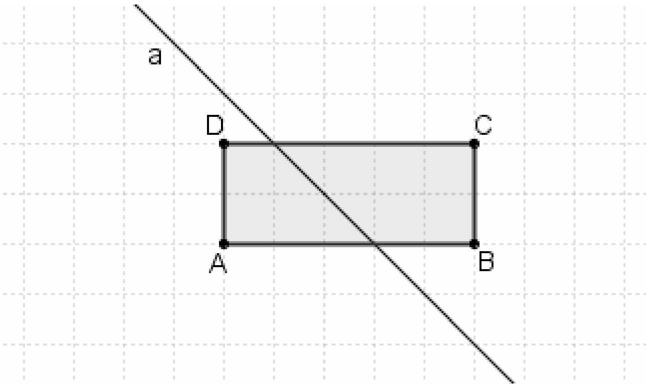
a) Determina le immagini A', B', C', D' dei vertici del rettangolo ABCD.
b) Qual è l'immagine di O nella trasformazione?
c) Determina le *contro*immagini A^*, B^*, C^*, D^* dei vertici di ABCD.



Vai a vedere la soluzione ⇨

2) Nella figura sotto riportata trovi un rettangolo ABCD e una retta a.

a) Disegna le immagini A', B', C', D', e le controimmagini A^*, B^*, C^*, D^*, dei vertici di ABCD, nella simmetria assiale di asse a.
b) Quali sono, qui, i punti del piano che coincidono con la propria immagine (punti "uniti")?



Vai a vedere la soluzione ⇨

Semplici trasformazioni geometriche con GEOGEBRA

Fermo restando che innanzitutto
devi saper svolgere gli esercizi
su *carta*,
con matita, righello e squadra,
il freeware GeoGebra permette,
fra le tantissime cose,
anche di sottoporre una figura
a qualche trasformazione geometrica fondamentale.

L'icona che serve a questo scopo
è facilmente riconoscibile,
e il messaggio di HELP
che si può far comparire
con la pressione di F1 sulla tastiera
ti spiega come fare.