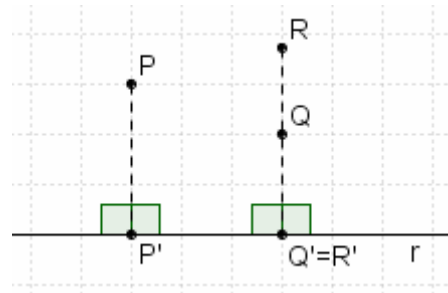


2. UN CONTROESEMPIO

Controesempio: una corrispondenza fra punti del piano, che non sia una “trasformazione”.

Se consideriamo su di un piano una retta r fissata e facciamo corrispondere ad ogni punto P del piano la sua proiezione P' su r , questa corrispondenza NON avrà il diritto di essere chiamata “trasformazione piana”, per il fatto che NON E' BIUNIVOCA ! Se è infatti vero che ad ogni punto del piano corrisponde uno ed un solo altro punto, non vale invece il viceversa: infatti, preso un punto del piano, esso avrà:

- infinite controimmagini, qualora appartenga alla retta r ;
- nessuna controimmagine, se non appartiene ad r .



3. L'IMMAGINE DI UN SEGMENTO ATTRAVERSO UNA TRASFORMAZIONE PIANA

Un dubbio.

Ma ... in una trasformazione piana, l'immagine di un segmento è sempre ancora un segmento?

Negli esempi precedenti (una omotetia di rapporto 3; una simmetria assiale) abbiamo visto (empiricamente, senza ancora una dimostrazione rigorosa) che l'immagine di un segmento risultava essere ancora un segmento.

In effetti, le trasformazioni più “comuni” sono quelle che mutano segmenti in segmenti.

Esistono però anche delle trasformazioni che NON si comportano in questo modo.

Per fare un esempio, consideriamo un piano nel quale sia stato fissato un riferimento cartesiano.

Possiamo pensare alla corrispondenza $P \rightarrow P'$ definita (utilizzando le coordinate) nel modo seguente:

$$P(x, y) \xrightarrow{t} P'(x', y'), \text{ con } \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y^3}{10} \end{cases}$$

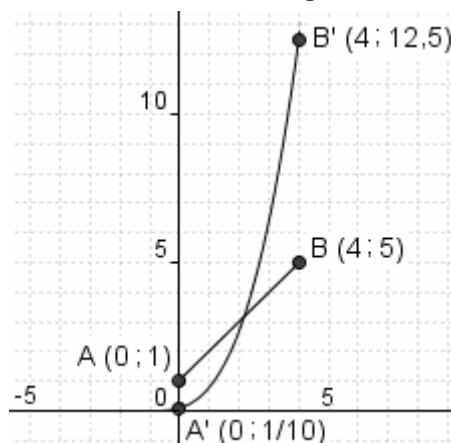
La corrispondenza è biunivoca, in quanto:

- non solo ad ogni punto (x, y) corrisponde uno ed un solo altro punto (x', y')
- ma è anche vero che ogni punto del piano risulta essere il corrispondente di uno ed un solo altro punto, come si può verificare invertendo le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \sqrt[3]{10y'} \end{cases}$$

Di qui si vede che per ogni punto del piano, esiste ed è unica la rispettiva controimmagine.

Se ora consideriamo
ad esempio
il segmento
di estremi
 $A(0,1)$ e $B(4,5)$
e andiamo a disegnare
le immagini dei suoi punti,
ci rendiamo conto
che tali immagini
non costituiscono un segmento,
bensì un arco di curva!



N
O
T
A

Osserviamo, per inciso, che se avessimo preso invece la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$ questa NON avrebbe individuato una “trasformazione geometrica”, perché non sarebbe stata biunivoca. Infatti, provando ad invertire, si sarebbe ottenuto

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \pm\sqrt{y'} \end{cases}$$

Ora, la radice quadrata preceduta dal doppio segno ci dice che: i punti con ordinata negativa non hanno controimmagine; quelli con ordinata positiva ce l'hanno ma non è unica.