5. TEOREMI SULLE ISOMETRIE

1. **In un'isometria a rette incidenti corrispondono rette incidenti, e a rette parallele corrispondono rette parallele.**
2. **In ogni isometria l'immagine di un triangolo è sempre ancora un triangolo, uguale (= congruente) a quello di partenza.**
3. **In ogni isometria ad un angolo corrisponde sempre un angolo, uguale a quello di partenza.**
4. **In ogni isometria ad un poligono corrisponde sempre un poligono, uguale a quello di partenza.**

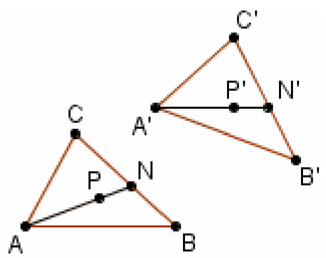
- **Dimostrazione del teorema 1**
  - Siano a, b due rette incidenti, e a', b' le rispettive rette immagini attraverso un'isometria i (sappiamo che un'isometria è anche un'affinità, quindi l'immagine di una retta attraverso un'isometria è sempre ancora una retta). Detto W il punto di intersezione fra a e b, l'immagine W' di W dovrà appartenere tanto alla retta a' quanto alla retta b', le quali pertanto saranno anch'esse incidenti.
  - Se invece a, b sono due rette parallele, le loro immagini a', b' dovranno pure essere parallele, perché se, per assurdo, avessero un punto in comune, la controimmagine di questo punto dovrebbe appartenere sia alla retta a che alla retta b, che quindi non sarebbero parallele, contro quanto supposto.
- **Dimostrazione del teorema 2**

Sia i un'isometria, e sia ABC un triangolo. Vogliamo innanzitutto dimostrare che l'insieme delle immagini dei punti di ABC costituisce ancora un triangolo; successivamente, faremo vedere che tale triangolo è uguale ad ABC.

Sia dunque: $A' = i(A),\ B' = i(B),\ C' = i(C)$. Poiché un'isometria muta segmenti in segmenti, l'insieme delle immagini dei punti del segmento AB andrà a costituire il segmento $A'B'$ (brevemente: l'immagine del segmento AB sarà il segmento $A'B'$), e analogamente per gli altri due lati. Insomma, $i(AB) = A'B',\ i(AC) = A'C',\ i(BC) = B'C'$: il "contorno" di ABC si muta nel "contorno" di $A'B'C'$.

Occorre ora provare che ogni punto P interno ad ABC ha come immagine un punto P', che è interno ad $A'B'C'$.

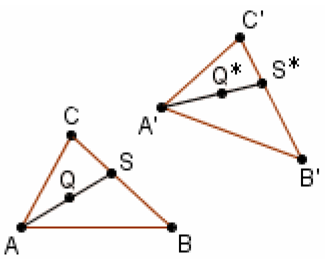
Sia dunque P un punto interno ad ABC.
Sia N l'intersezione della semiretta AP col lato BC.
Il punto P appartiene al segmento AN.
Sia $N' = i(N)$. Il punto N' apparterrà a $B'C'$, perché questo segmento è costituito dalle immagini dei punti del segmento BC; ed N sta, appunto, su BC.
Ora il punto $P' = i(P)$ dovrà appartenere al segmento $A'N'$, ma quest'ultimo segmento è interno al triangolo $A'B'C'$; e ciò prova che P' è interno ad $A'B'C'$.



Per completare la dimostrazione, manca ancora un passaggio:
bisogna far vedere che la controimmagine di ogni punto interno ad $A'B'C'$ è interna ad ABC.
Sia dunque Q* un punto interno ad $A'B'C'$; indichiamo con Q la sua controimmagine.
Vogliamo far vedere che Q è interno ad ABC.

Chiamiamo S* l'intersezione della semiretta $A'Q^*$ col lato $B'C'$; sia S la controimmagine di S*.

Teniamo presente che il punto Q* appartiene al segmento $A'S^*$.
Il punto S dovrà appartenere a BC, perché quest'ultimo segmento è costituito dalle controimmagini dei punti del segmento $B'C'$, ed S* sta appunto su $B'C'$.
Consideriamo ora il segmento AS, che è interno al triangolo ABC: l'insieme delle immagini dei suoi punti va a costituire il segmento $A'S^*$; ma tra i punti di $A'S^*$ c'è anche Q*; quindi la controimmagine Q del punto Q* sta su AS, che è interno ad ABC (NOTA)



Tutto ciò prova che l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC, va a costituire ancora un triangolo ($A'B'C'$).

Riguardo infine al fatto che $A'B'C'$ sia uguale ad ABC, ciò è conseguenza immediata del 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli ($A'B' = AB,\ A'C' = AC,\ B'C' = BC$ per def. di isometria).
E con ciò la dimostrazione del teorema è completata.

NOTA - Più brevemente, per far vedere che la controimmagine di ogni punto interno ad $A'B'C'$ è interna ad ABC, si sarebbe potuta chiamare in causa la corrispondenza inversa della i. Come sappiamo, l'inversa di un'isometria è ancora una isometria; e per quanto già dimostrato sopra, siamo certi che le immagini, attraverso la i^{-1}, dei punti interni ad $A'B'C'$, sono interne ad ABC. Quindi le controimmagini, attraverso la i, dei punti interni ad $A'B'C'$, sono interne ad ABC.