

7. ALTRE ISOMETRIE. RELAZIONE FRA ISOMETRIE E MOVIMENTI RIGIDI

a)

Prima di tutto, **si ottiene sempre un'isometria quando si "compongono"**
(= si applicano successivamente) **due qualsivoglia isometrie.**

Infatti è immediato dimostrare che

la composizione di due isometrie è ancora un'isometria.

Dimostrazione

Presi due punti A, B, e indicate:

- con A' , B' le loro immagini attraverso la prima delle due isometrie da applicare successivamente
- con A'' , B'' le immagini di A' , B' attraverso la seconda isometria

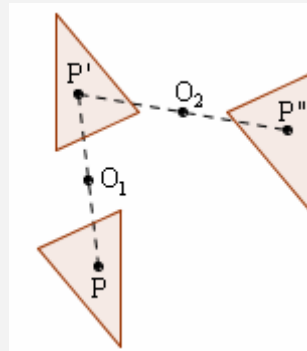
avremo $A'B' = AB$ e poi $A''B'' = A'B'$, da cui $A''B'' = AB$.

Ad esempio, consideriamo due punti fissi O_1 e O_2 ,
e applichiamo al generico punto P del piano

- ♫ innanzitutto la simmetria di centro O_1 ,
ottenendo un certo punto P' ;
- ♫ poi, a questo P' , applichiamo la simmetria di centro O_2 ,
pervenendo ad un nuovo punto P'' .

Possiamo ora pensare alla trasformazione
che muta *direttamente* P in P'' :

bene, questa, essendo la composizione di due isometrie,
sarà ancora un'isometria.



*In figura è anche
rappresentato
un triangolo con
la sua immagine
attraverso la
prima simmetria,
poi l'immagine
di questa immagine
attraverso la
seconda simmetria*

b)

**Se si pensa di "far scivolare il piano su sé stesso",
o di "ribaltare il piano intorno ad una sua retta, che rimanga ferma nel ribaltamento",
o di effettuare varie composizioni, ossia applicazioni successive, di tali movimenti rigidi,
si individua in tal modo un'isometria.**

Possiamo visualizzare bene questo fatto utilizzando la lavagna come piano fisso,
e un foglio di plastica trasparente come piano mobile sovrapposto al precedente.

Facciamo un disegno sulla lavagna, appoggiamoci sopra il foglio trasparente e su questo ricalchiamo il disegno.
Poi, sempre tenendo il foglio trasparente a ridosso della lavagna,
lo spostiamo lateralmente o verticalmente, magari anche ruotandolo.

Ora sul piano della lavagna si vedono due figure, quella originaria sull'ardesia e quella ricalcata a penna
sul foglio; ai "vecchi" punti della figura originaria corrispondono i nuovi punti della figura sul foglio.

Viceversa, il teorema che citeremo fra poco

("una qualsiasi isometria si può scomporre nell'applicazione successiva di al più 3 simmetrie assiali"),
insieme con l'ovvia osservazione che una simmetria assiale può essere evidentemente associata
ad un movimento rigido di "ribaltamento del piano attorno a una sua retta", mostra che

**ogni isometria, comunque sia stata definita, è SEMPRE interpretabile come generata
da un movimento rigido che "sposti il piano per poi risovrapporlo a sé stesso". Quindi**

LE ISOMETRIE SONO INTIMAMENTE CORRELATE o correlabili CON I MOVIMENTI RIGIDI.

**E un'isometria viene detta "DIRETTA" o "INVERSA" a seconda che
il movimento rigido dal quale si può pensare generata**

- comporti soltanto uno "strisciamento" del piano su sé stesso (isometrie dirette)
- oppure richieda anche un ribaltamento del piano intorno ad una sua retta (isometrie inverse).

□ LA SIMMETRIA ASSIALE E' UN PO' "LA REGINA" DELLE ISOMETRIE

Un teorema estremamente interessante (ne omettiamo la dimostrazione) afferma che **QUALSIASI ISOMETRIA
si può sempre scomporre nel prodotto (=applicazione successiva) di AL PIU' 3 SIMMETRIE ASSIALI.**
Quindi la **simmetria assiale**, in questo senso, ci appare come la "**isometria regina**",
quella che, volendo, può essere assunta come l' "ingrediente base" di qualsiasi altra isometria.

Si può poi dimostrare che

- componendo un numero **PARI** di simmetrie assiali si ottiene sempre una isometria diretta;
- componendone un numero **DISPARI**, si ha una isometria inversa.

□ L'ISOMETRIA IDENTICA (= IDENTITA')

La indicheremo col simbolo I . E' l'isometria banale che "lascia tutto fermo": $I(P) = P, \forall P$.
Pur essendo banale, ha un'importanza teorica notevole.