

8. TEOREMI SULLA COMPOSIZIONE (= APPLICAZIONE SUCCESSIVA) DI DUE ISOMETRIE

1) La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione.

Il vettore di questa traslazione è il doppio della “distanza vettoriale orientata” del 1° asse dal 2°.

2) La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione

- il cui centro è il punto di intersezione dei due assi,
- e il cui angolo è il doppio dell'angolo orientato individuato dai due assi, presi nell'ordine.

3) La composizione di due simmetrie centrali di centri O_1, O_2 è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

4) La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ è la traslazione di vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

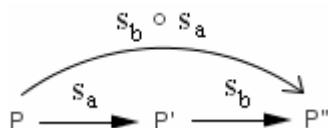
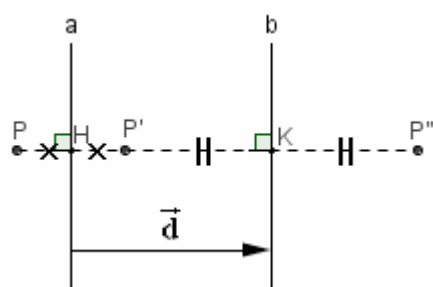
5) La composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro, è ancora una rotazione, avente

- per centro lo stesso centro,
- e per angolo di rotazione la somma algebrica degli angoli delle rotazioni componenti.

6) La composizione di un'omotetia con un'isometria o viceversa

muta sempre un triangolo in un altro simile ed è per questo chiamata “**similitudine**”.

Dimostrazione di 1)



Il simbolo $S_b \circ S_a$ indica

la trasformazione che si ottiene applicando

- S_a al punto P iniziale,
- poi S_b al punto P' ottenuto.

Osserviamo che

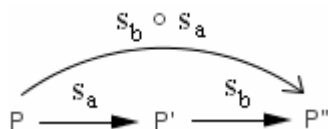
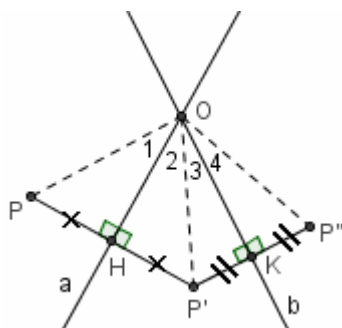
la trasformazione applicata **PER PRIMA** viene scritta **PER ULTIMA**.

$$\boxed{PP''} = PP' + P'P'' = 2HP' + 2P'K = 2(HP' + P'K) = 2HK = \boxed{2\vec{d}}$$

Nella catena, tutti i segmenti vanno pensati orientati.

Il vettore $\vec{d}$ esprime anch'esso una distanza “orientata” (da a verso b)

Dimostrazione di 2)

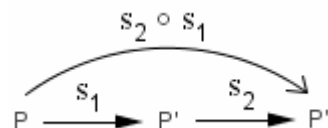
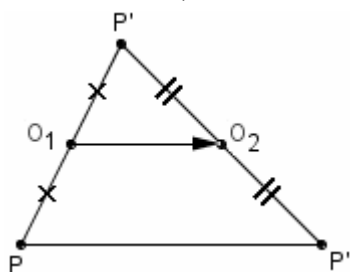


$$OPH = OP'H, \quad OP'K = OP''K \quad (1^\circ \text{ Criterio})$$

$$\text{Perciò } \hat{O}_1 = \hat{O}_2; \quad \hat{O}_3 = \hat{O}_4; \quad \boxed{OP''} = OP' = \boxed{OP}$$

$$\boxed{POP''} = POP' + P'OP'' = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\hat{HOK} = \boxed{2ab}$$

Dimostrazione di 3)

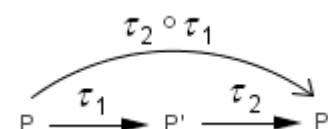
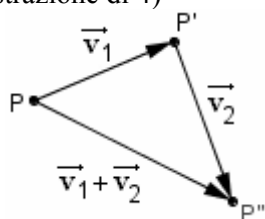


In $PP'P''$, O_1O_2 è la congiungente i punti medi di due lati:

perciò

$$\left. \begin{array}{l} PP'' \parallel O_1O_2 \\ PP'' = 2O_1O_2 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{PP'' = 2\overrightarrow{O_1O_2}}$$

Dimostrazione di 4)



$$\boxed{PP'' \text{ orientato}} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

La somma di due vettori si effettua

- applicandoli uno di seguito all'altro, per poi prendere il vettore che parte dall'inizio del primo e termina sulla punta del secondo, proprio come illustrato qui a sinistra
- oppure con l'equivalente “regola del parallelogrammo” $\Rightarrow$