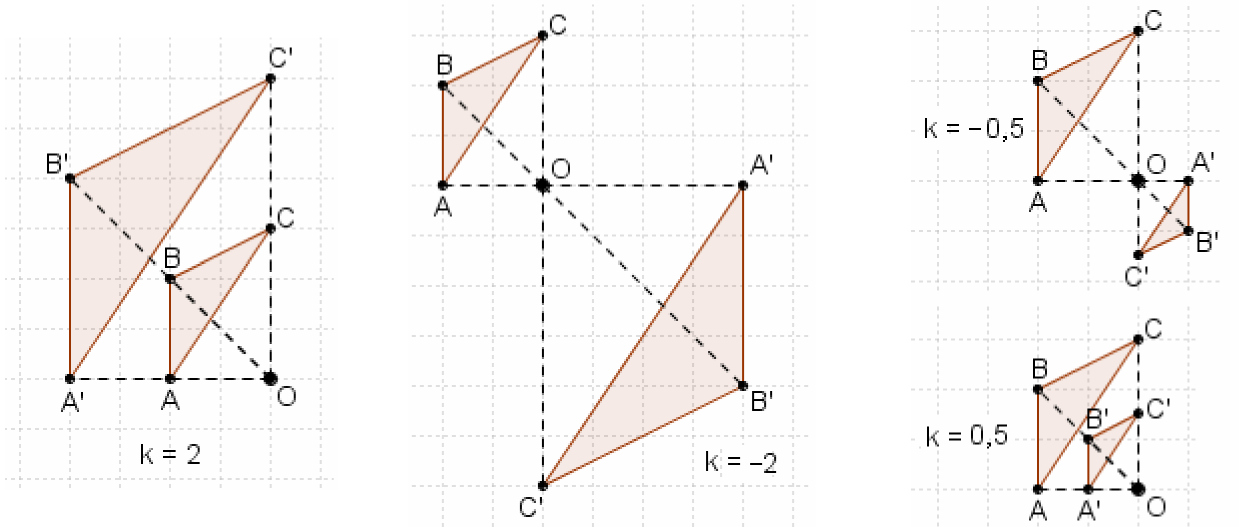
9. OMOTETIE CON RAPPORTO NEGATIVO, SIMILITUDINI

Un'omotetia di rapporto negativo si comporta nel modo illustrato dalla figura qui a fianco (dove, per fissare le idee, si è preso $k = -3$).

In definitiva, **unificando le definizioni di omotetia a rapporto positivo e a rapporto negativo**:
si dice **OMOTETIA di centro O e rapporto *k*** ($k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, k positivo o negativo)
la trasformazione piana che ad un punto P associa il punto P', tale che

a) P, P', O siano allineati;

b) si abbia $OP' = k \cdot OP$, interpretando i segmenti come orientati (in pratica, come rappresentanti di vettori);
oppure, se si preferisce: $OP' = |k| \cdot OP$, interpretando i segmenti come "non orientati" = "assoluti"
ma con l'intesa che i due punti P, P' vanno presi
- *dalla stessa parte, rispetto ad O*, nel caso $k > 0$,
- *da parti opposte rispetto ad O*, nel caso $k < 0$.



- **E' evidente che un'omotetia non conserva le distanze** (= *non* muta due punti A, B in due altri punti A', B' tali che la distanza A'B' sia uguale alla distanza AB dei due punti iniziali), **quindi non è un'isometria; tuttavia, si potrebbe dimostrare che è un'affinità**, ossia che **muta rette in rette**, conservando l'ordine dei punti allineati (e, di conseguenza, muta semirette in semirette, **segmenti in segmenti, triangoli in triangoli**).

- Anzi, si può dimostrare (vedi la pagina a fianco) che **in un'omotetia di rapporto *k* l'immagine di un segmento AB è un altro segmento $A'B'$ tale che $A'B'/AB = |k|$.**

- Da ciò segue che
se il rapporto fra due dati segmenti AB e CD è un certo numero *h* (AB/CD = *h*),
allora avrà lo stesso valore *h* anche il rapporto fra i due segmenti $A'B'$ e $C'D'$
che corrispondono ad AB e CD attraverso un'omotetia: $\dfrac{AB}{CD} = h \Rightarrow \dfrac{A'B'}{C'D'} = h$.

  Per indicare ciò si dice, brevemente, che "**un'omotetia conserva i rapporti fra i segmenti**".

- Inoltre **un'omotetia conserva gli angoli** (= muta ogni angolo in un angolo uguale a quello di partenza) e **trasforma sempre un triangolo in un altro triangolo, simile a quello di partenza**.

  Se, tanto per fare un esempio, un'omotetia ha rapporto $k = 3$,
  allora trasformerà qualsiasi triangolo in un triangolo, simile a quello dato,
  avente ciascun *lato* triplo del lato corrispondente del triangolo originario,
  quindi anche il *perimetro* triplo, e l'*area* uguale a 9 volte l'area del triangolo di partenza.

- Poiché poi **qualsiasi affinità "muta rette parallele in rette parallele"**
(facile la dimostrazione, del tutto analoga a quella data con riferimento alle isometrie),
ciò vale anche per le omotetie.

Questa ⇨ bella figura dinamica GEOGEBRA mostra all'opera un'omotetia
il cui centro e il cui rapporto (positivo o negativo) possono essere fissati dall'utente.

Si dimostra che **date due omotetie** di centri $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$ e rapporti k_1, k_2, "**componendole**", cioè applicandole una dopo l'altra, **si ottiene ancora un'omotetia**, il cui rapporto k e centro C sono tali che:

- $k = k_1 \cdot k_2$
- C è allineato con C_1 e C_2, se $C_1 \neq C_2$, mentre nel caso particolare $C_1 \equiv C_2$ si ha $C \equiv C_1 \equiv C_2$

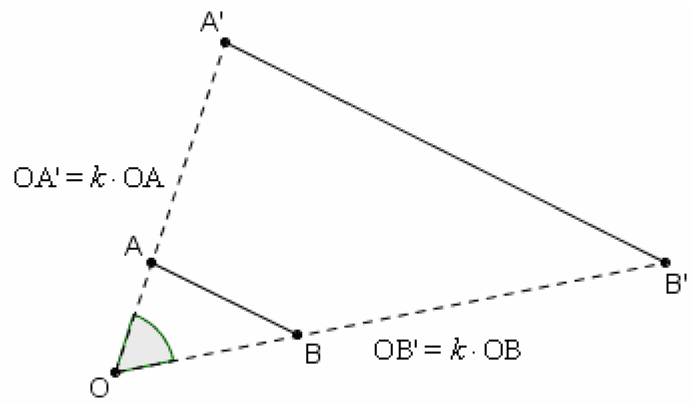
DIMOSTRAZIONE DI ALCUNI DEGLI ENUNCIATI DELLA PAGINA PRECEDENTE
(diamo qui per scontato che un'omotetia sia un'affinità, quindi muti rette in rette, segmenti in segmenti, triangoli in triangoli)

"In un'omotetia di rapporto k il segmento $A'B'$ immagine di un segmento AB è tale che $\frac{A'B'}{AB} = |k|$ ".

Consideriamo un'omotetia di centro O e rapporto k (supponiamo inizialmente, per meglio fissare le idee, $k>0$).

Siano A, B due punti qualsiasi del piano e A', B' le rispettive immagini.
Allora, per definizione di omotetia, si avrà $OA' = k \cdot OA$ e $OB' = k \cdot OB$
per cui i due triangoli $OA'B'$, OAB sono simili per il 2° Criterio di Similitudine: hanno infatti

- due lati proporzionali $\underbrace{OA':OA}_{k} = \underbrace{OB':OB}_{k}$)
- e l'angolo compreso in comune.



E quindi, poiché in due triangoli simili i lati sono tutti in proporzione, dovrà essere anche

$A'B' : AB = \underbrace{OA':OA}_{k} = \underbrace{OB':OB}_{k}$ e perciò $\frac{A'B'}{AB} = k$ (se si preferisce, $A'B' = k \cdot AB$).

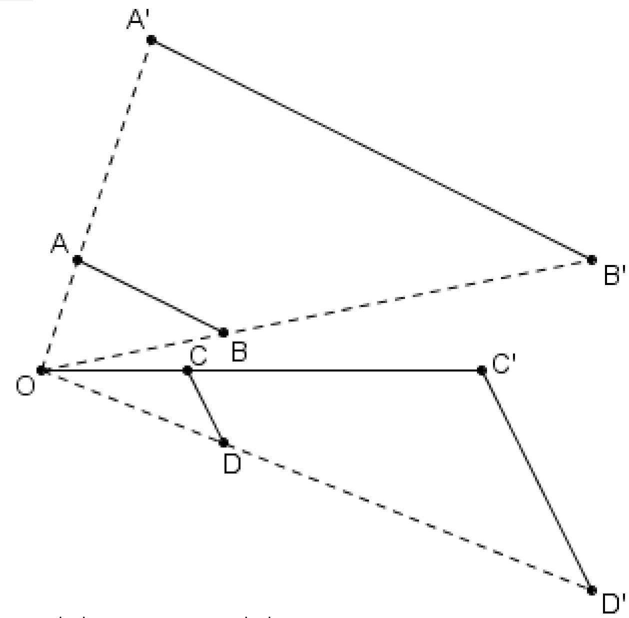
Ora, il simbolo di valore assoluto nell'enunciato è stato posto per includere anche il caso $k<0$, nel quale la dimostrazione sarebbe del tutto simile.

"Se il rapporto fra due dati segmenti AB e CD è un certo numero h (AB/CD = h), allora avrà lo stesso valore h anche il rapporto fra i due segmenti $A'B'$ e $C'D'$ che corrispondono ad AB e CD attraverso un'omotetia:

$$\frac{AB}{CD} = h \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = h \text{ "}$$

Con gli stessi ragionamenti della parte precedente, si prova che in figura compaiono due coppie di triangoli simili tra loro:
$OA'B'$ e OAB, $OC'D'$ e OCD. E' dunque
$A'B' : AB = \underbrace{OA':OA}_{k}$ e $C'D' : CD = \underbrace{OC':OC}_{k}$
quindi anche $A'B' : AB = C'D' : CD$
e, permutando i medi, $A'B' : C'D' = AB : CD$.

Se allora $\frac{AB}{CD} = h$, sarà anche $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} = h$.



"In un'omotetia l'immagine di un triangolo è un triangolo simile a quello di partenza".

Sia ABC un triangolo, e sia $A'B'C'$ la sua immagine attraverso un'omotetia di rapporto k.
Allora avremo, come dimostrato sopra, $A'B' = |k| \cdot AB$, $A'C' = |k| \cdot AC$, $B'C' = |k| \cdot BC$;
quindi i lati di $A'B'C'$ saranno proporzionali ai lati di ABC
e pertanto potremo dire che i due triangoli sono simili fra loro per il **3° Criterio di similitudine.**

Si dice infine "SIMILITUDINE" una trasformazione che risulti dall'applicazione successiva ("composizione") di un'OMOTETIA + un'ISOMETRIA, o di un'ISOMETRIA + un' OMOTETIA.

Le proprietà scritte nel precedente riquadro dedicato alle omotetie si estendono anche alle similitudini.