15. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE (soprattutto: affinità) NEL PIANO CARTESIANO

Nel piano cartesiano, una trasformazione può essere descritta dalle due equazioni che fanno passare dalle coordinate del "punto iniziale" (x, y) a quelle del "punto finale" (x', y')

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$

Si può dimostrare che le AFFINITA'
(= le trasformazioni che mutano rette in rette, conservando l'ordine dei punti allineati)
sono tutte e sole quelle trasformazioni le cui equazioni sono "LINEARI" (= "di 1° grado"),
ossia della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases},$$

PURCHÉ PERÒ si abbia

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \quad :$$

infatti se tale determinante si annulla, la corrispondenza non è biunivoca (vedi NOTA).

FRA LE AFFINITA', SONO poi ISOMETRIE quelle per le quali il determinante D
è tale che siano verificate ENTRAMBE LE CONDIZIONI SEGUENTI:

1) **D = +1 oppure D = −1**
2) **gli elementi di una diagonale sono uguali e quelli dell'altra opposti.**

Le trasformazioni il cui determinante soddisfa alla condizione 2), ma non necessariamente alla 1), sono invece le SIMILITUDINI (= composizioni di un'ISOMETRIA con un'OMOTETIA, o viceversa).

NOTA In effetti, fissata a piacere una coppia (x', y'), la risoluzione rispetto a x, y del sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}, \quad \text{che poi equivale a} \quad \begin{cases} ax + by = x' - m \\ cx + dy = y' - n \end{cases},$$

permette di risalire alla coppia incognita (x, y) cui la (x', y') corrisponde. Ma se il determinante dei coefficienti delle incognite $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ è nullo, tale sistema risulta impossibile o indeterminato: quindi il punto (x', y') non ha, in tal caso, nessuna controimmagine, oppure ne ha infinite.

Per la quantità D = $ad - bc$ ("costante di affinità" o "rapporto di affinità") si può dimostrare che

1) **il suo valore assoluto esprime il rapporto $\mathrm{S'/S}$**
   fra le aree di due figure corrispondenti qualsiasi $\mathrm{F'}$ ed F:

$$|ad - bc| = \frac{\mathrm{S'}}{\mathrm{S}}$$

2) **il suo segno indica:**
   - ♪ **se è positivo, che la trasformazione muta un poligono in un altro poligono, i cui vertici si susseguono nello stesso ordine (orario o antiorario) che avevano nel poligono iniziale (si parlerà di affinità "*DIRETTA*");**
   - ♫ **se è negativo, che la trasformazione muta un poligono in un altro poligono, i cui vertici si susseguono in ordine inverso rispetto ai vertici del poligono iniziale (si parlerà di affinità "*INVERSA*").**

In sintesi:
$ad - bc > 0 \rightarrow$ ***affinità DIRETTA***
$ad - bc < 0 \rightarrow$ ***affinità INVERSA*** (NOTA)

NOTA Gli aggettivi "diretta" e "inversa" qui usati vanno d'accordo, come è intuitivo e si potrebbe dimostrare, col significato che era stato loro attribuito nel paragrafo 7, quando, parlando di isometrie, avevamo convenuto di classificare una isometria come "diretta" nel caso fosse associabile ad un movimento rigido che non *comportasse* ribaltamenti ma solo strisciamenti, "inversa" nel caso contrario.
OCCHIO INVECE
a **non confondere** la locuzione "affinità inversa" con "affinità inversa di un'altra affinità".

Esempio

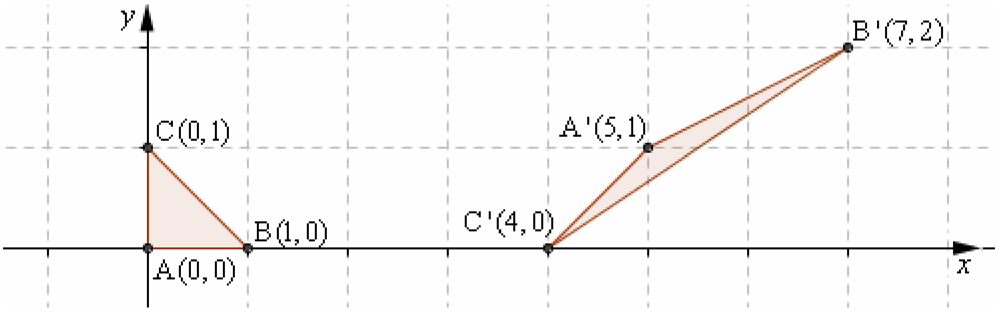
Consideriamo la trasformazione *t* descritta dalle equazioni $\boxed{t:\begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}}$

Innanzitutto, questa trasformazione è un'affinità, perché le sue equazioni sono di $\boxed{1° \text{grado}}$ con

$$\boxed{ad - bc} = 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = -2 + 1 = -1 \,\boxed{\neq 0}\,.$$

Non è però una isometria (non si realizza la seconda delle due condizioni caratterizzanti).

"Esploriamo" ora il comportamento di questa affinità
andando a vedere, ad esempio, come opera sul triangolo ABC di vertici A(0,0); B(1,0); C(0,1):



Abbiamo disegnato il triangolo ABC e il suo trasformato A'B'C'. Dalla figura si può notare che
un'affinità, in genere, non conserva né le distanze (ad esempio, B'C' non è uguale a BC),
né i rapporti fra i segmenti (ad es., il rapporto AC/AB non è uguale ad A'C'/ A'B')
e neppure gli angoli: **quindi, in generale, un'affinità muta sia le forma che le dimensioni delle figure**.

Però in un'affinità è costante il rapporto S'/S fra le aree di due superfici corrispondenti, e tale rapporto costante è uguale al valore assoluto di quel determinante $ad - bc$ che viene chiamato "costante di affinità" o anche "rapporto di affinità".

Nel nostro caso $ad - bc = -1$, quindi $|ad - bc| = 1$ e ciò significa che in questa particolare affinità che abbiamo scelto come esempio, si ha sempre S'/S = 1 (vale a dire, si conservano le aree).
In effetti si può facilmente verificare che l'area del triangolo A'B'C' è uguale all'area del triangolo ABC.

Abbiamo anche scritto che, se $ad - bc > 0$, si parla di affinità "diretta", se $ad - bc < 0$ di affinità "inversa" (un'affinità diretta conserva il "verso" delle figure,
mentre un'affinità inversa effettua una specie di "ribaltamento", invertendo il verso delle figure).
Nel nostro caso, $ad - bc = -1$ quindi **l'affinità da noi considerata è "inversa".**
In effetti, nel percorrere il perimetro di **ABC** troviamo, procedendo in senso **antiorario**, prima A, poi B, poi C, mentre se vogliamo percorrere il perimetro del **triangolo immagine A'B'C'** in modo da incontrare prima A', poi B', poi C', dovremo procedere in senso **orario**.

3 COPPIE DI PUNTI CORRISPONDENTI INDIVIDUANO UNIVOCAMENTE UN'AFFINITA'

Poiché l'equazione di una generica affinità è $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ e quindi contiene 6 parametri,

un'affinità è univocamente determinata quando, per 3 punti non allineati del piano, siano assegnati i rispettivi 3 punti corrispondenti, anch'essi non allineati.

Infatti tale conoscenza porta complessivamente a poter scrivere 6 condizioni!

Ad esempio, sapere che un'affinità *t* si comporta nel modo seguente:

$$(0,0) \xrightarrow{t} (5,1); \quad (1,0) \xrightarrow{t} (7,2); \quad (0,1) \xrightarrow{t} (4,0)$$

permette di scrivere, sostituendo nel sistema $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$:

$$\begin{matrix} 5 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + m \\ 1 = c \cdot 0 + d \cdot 0 + n \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 7 = a \cdot 1 + b \cdot 0 + m \\ 2 = c \cdot 1 + d \cdot 0 + n \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 4 = a \cdot 0 + b \cdot 1 + m \\ 0 = c \cdot 0 + d \cdot 1 + n \end{matrix}.$$

Tali 6 condizioni, poste a sistema, consentiranno di determinare i valori dei 6 parametri *a, b, c, d, m, n*.
Se ci provi, troverai
$a = 2,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -1,\ m = 5,\ n = 1$.