

## 22. ESERCIZI SULLE AFFINITA' (soluzioni alle pagine 312-313-314)

### □ Studia le affinità seguenti:

- 1)  $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2y \end{cases}$     2)  $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x \end{cases}$     3)  $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x - y \end{cases}$     4)  $\begin{cases} x' = 4x + y - 1 \\ y' = -x + 2y + 1 \end{cases}$     5)  $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 4 \end{cases}$
- 6)  $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = x + 3y \end{cases}$     7)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$     8)  $\begin{cases} x' = \frac{-x + 2y + 2}{3} \\ y' = \frac{4x + y - 2}{3} \end{cases}$     9)  $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$
- 10)  $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = -2x + 2y + 6 \end{cases}$     11)  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2 \end{cases}$     12)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$     13)  $\begin{cases} x' = 7x + 24y \\ y' = 24x - 7y \end{cases}$     14)  $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$
- 15)  $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 15 \end{cases}$     16)  $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{14}{5}x - \frac{2}{5}y \end{cases}$     17)  $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$     18)  $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 6 \end{cases}$

### □ Esercizi vari

- 19) Considera l'affinità di equazioni:  $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = 2x - y \end{cases}$   
e trova l'immagine e la controimmagine della circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  (circonferenza di centro l'origine e raggio 1)
- 20) Considera l'affinità di equazioni:  $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 1 \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$   
e trova l'immagine e la controimmagine della retta  $x + y = 1$
- 21) Scrivi le equazioni:  
a) della simmetria di centro (2,3)    b) della simmetria di centro (-3,0)
- 22) Scrivi le equazioni:  
a) della simmetria  $s_1$  di centro  $C_1(1,1)$     b) della simmetria  $s_2$  di centro  $C_2(4,2)$   
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta  $s_2 \circ s_1$ , osservando che si tratta di una traslazione, il cui vettore è il doppio del vettore  $\overline{C_1C_2}$
- 23) Dimostra *facendo uso di equazioni* che, in generale, il *prodotto* (= composizione, applicazione successiva) di due simmetrie di centri  $C_1(x_1, y_1)$ ,  $C_2(x_2, y_2)$  è una traslazione il cui vettore è  $2 \cdot \overline{C_1C_2}$  (supponendo di applicare prima  $s_1$  poi  $s_2$ ).
- 24) Scrivi le equazioni:  
a) della simmetria il cui asse è la retta  $x = 3$   
b) della simmetria il cui asse è la retta  $y = -1$
- 25) Scrivi le equazioni della simmetria: a) il cui asse è la retta  $x = 1/2$     b) il cui asse è la retta  $y = 1$   
c) Successivamente, componi le due affinità constatando che si ottiene la simmetria centrale di centro (1/2, 1). Osserviamo che questa può anche essere interpretata come una rotazione di  $180^\circ$  intorno al punto (1/2, 1): ciò conferma che la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione.
- 26) Componi le due simmetrie assiali di assi  $x = 1$  e  $x = 3$ , constatando che (gli assi essendo paralleli) si ottiene una traslazione.

- 27) Componi (nell'ordine) le due simmetrie assiali aventi per assi l'asse  $x$  e, rispettivamente, la retta  $y = x$ .  
Applica poi la trasformazione ottenuta al triangolo OAB, con  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,2)$ , per constatare che si tratta di una rotazione di  $90^\circ$  in senso antiorario intorno all'origine.
- 28) Se io ti dico che le due curve di equazioni  $x^2 + xy = 1$ ;  $x^2 + xy + 2y = 5$  sono simmetriche l'una dell'altra rispetto a un punto, tu riesci a trovarmi le coordinate del punto?
- 29) Si sa che la curva di equazione  $x^2 - xy + y^2 - x - 4y + 7 = 0$  è simmetrica rispetto a un punto ("simmetrica" vuol dire "simmetrica di sé stessa", ossia "mutata in sé stessa dalla simmetria"). Trovare le coordinate del punto.
- 30) Scrivi le equazioni:  
a) dell'omotetia di centro  $(3, 4)$  e rapporto  $-2$   
b) dell'omotetia di centro  $(0, 1)$  e rapporto  $3$
- 31) Scrivi le equazioni:  
a) dell'omotetia  $\omega_1$  di centro  $C_1(1, 2)$  e rapporto  $k_1 = 3$   
b) e dell'omotetia  $\omega_2$  di centro  $C_2(4, -1)$  e rapporto  $k_2 = 1/6$   
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta  $\omega_2 \circ \omega_1$ , osservando che si tratta ancora di un'omotetia, il cui rapporto è il prodotto dei rapporti delle due omotetie di partenza, e il cui centro è allineato coi loro centri.
- 32) Scrivi le equazioni della simmetria rispetto alla retta  $y = 4x$ .
- 33) Scrivi le equazioni della simmetria assiale di asse  $r: y = x - 1$   
Determina poi i punti uniti e le rette unite servendoti delle equazioni trovate: constaterai, come del tutto prevedibile, che c'è tutta una retta di punti uniti (la  $r: y = x - 1$ , ovviamente) mentre sono rette unite, senza essere rette di punti uniti, tutte le  $y = -x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .
- 34) Si può dimostrare che un'affinità è individuata in modo unico se, per 3 punti non allineati del piano, vengono assegnate le rispettive immagini (anch'esse non allineate).  
Ciò premesso, determina l'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:  
 $O(0,0) \rightarrow O'(1,0)$        $A(1,0) \rightarrow A'(2,1)$        $B(0,1) \rightarrow B'(3,3)$
- 35) Determina le equazioni dell'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:  
 $A(1,1) \rightarrow A'(0,4)$        $B(0,2) \rightarrow B'(2,4)$        $C(-1,1) \rightarrow C'(2,2)$   
e successivamente trove gli elementi uniti.
- 36) Spiega perché non può esistere nessuna affinità che trasformi la terna di punti  $(1,3); (2,6); (3,9)$  nella terna  $(1,1); (2,3); (3,2)$ .
- 37) Determina i coefficienti  $a, b, c, d, m, n$  in modo che l'affinità  $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$  ammetta  $y = x$  come retta di punti uniti, e muti  $W(1,2)$  in  $W'(2,0)$   
Successivamente, stabilisci se l'affinità ammette altre rette unite oltre alla  $y = x$ .
- 38) Esistono valori dei parametri  $a, b$  tali che l'affinità  $\begin{cases} x' = (a-1)x + by \\ y' = cx + (a-3)y + 4 \end{cases}$  sia un'isometria?

### 39) UNA PROPRIETÀ INTERESSANTE

Dimostra che **ogni affinità "conserva il punto medio dei segmenti"**, nel senso che l'immagine, attraverso una qualsiasi affinità, del punto medio di un segmento AB, è *sempre* coincidente col punto medio del corrispondente segmento A'B' (ricorda che l'ascissa del punto medio è la media delle ascisse, e analogamente per le ordinate).

**SOLUZIONI**

- 1)  $D = 6$ : affinità diretta che moltiplica per 6 le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite:  $y = 0$ ;  $y = -x$ .
- 2)  $D = -2$ : aff. inversa che raddoppia le aree. Punto unito:  $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ . Rette unite:  $y = -2x - 2$ ;  $y = x - \frac{1}{2}$ .
- 3)  $D = -2$ : affinità inversa che raddoppia le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite:  $y = \frac{1}{3}x$ ;  $x = 0$ .
- 4)  $D = 9$ : affinità diretta che moltiplica per 9 le aree. Punto unito:  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ . Retta unita:  $y = -x$ .
- 5)  $D = 1$ . E' un'isometria diretta; ha come punto unito  $(-2, 2)$  e non ha nessuna retta unita.
- 6)  $D = -3$ : affinità inversa che triplica le aree.  
Punto unito:  $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ . Due rette sono unite: la  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$  e la  $x = 1$ .
- 7)  $D = 2$ . E' una similitudine diretta, che raddoppia le aree (quindi, essendo una similitudine, ingrandisce i segmenti in "scala", moltiplicandone le lunghezze per  $\sqrt{2}$ ); ha come punto unito  $(0, 0)$  e non ha nessuna retta unita.
- 8)  $D = -1$ : affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti:  $y = 2x - 1$ .  
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coefficiente angolare  $-1$  ( $y = -x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ).
- 9)  $D = -1$ . E' una isometria inversa. Ha tutta una retta di punti uniti, la  $y = 2x$ ,  
e ha altre infinite rette unite, quelle della forma  $y = -\frac{1}{2}x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .
- 10)  $D = 2$ : affinità diretta che raddoppia le aree. Non ha punti uniti. Ha una retta unita: la  $y = 2x$ .
- 11)  $D = -1$ . E' una isometria inversa. Non ha punti uniti. Ha una retta unita, la  $y = x + 1$ .
- 12)  $D = -1$ : affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti:  $y = \frac{1}{2}x$ .  
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle parallele all'asse  $y$  ( $x = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ).
- 13)  $D = -625$ . E' una similitudine inversa. In questa similitudine, dato che le aree vengono moltiplicate per 625, le lunghezze dei segmenti vengono moltiplicate per 25.  
Ha come punto unito l'origine, e ha le due rette unite  $y = \frac{3}{4}x$  e  $y = -\frac{4}{3}x$ .
- 14)  $D = -1$ : affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti:  $y = x$ .  
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coeff. ang. 3 ( $y = 3x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ).
- 15) Avrai riconosciuto che si tratta della traslazione il cui vettore ha componenti  $(3, 15)$ .  
E' dunque un'isometria diretta (se calcoli la costante di affinità, la troverai uguale a +1 e vedrai che nel determinante i termini su di una diagonale sono uguali e quelli sull'altra diagonale entrambi nulli e quindi interpretabili come opposti) e non ha punti uniti, ma in compenso ha come rette unite tutte quelle parallele al vettore di traslazione, ossia tutte quelle di equazione  $y = 5x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .
- 16)  $D = -2$ : affinità inversa che raddoppia le aree. Ha una retta di punti uniti:  $y = 2x$ .  
Oltre alla precedente, sono rette unite tutte le  $y = -\frac{7}{4}x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .
- 17)  $D = 3$ : affinità diretta che triplica le aree.  
Ammette tutta una retta di punti uniti (la  $y = -x - 1$ )  
e infinite rette unite (quelle di equazione  $y = x + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ).
- 18) Ti sei accorto che si tratta di un'omotetia?  
Essa dimezza le lunghezze e moltiplica per  $\frac{1}{4}$  le aree;  
l'unico suo punto unito è il centro di omotetia  $(2, 4)$   
e ha invece infinite rette unite: se le ricerchi algebricamente, troverai  
♫ le rette di equazione  $y = mx - 2m + 4$ ,  
le quali, come puoi constatare sostituendo, passano tutte per il punto  $(2, 4)$ ,  
e hanno inclinazione non verticale che varia al variare di  $m$ ;  
♫ più la  $x = 2$ , che è poi la retta verticale passante per  $(2, 4)$ .

19) Immagine:  $5x^2 + 2y^2 - 2xy + 20x - 4y + 11 = 0$

Controimmagine:  $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 3 = 0$

20) Immagine:  $3x - 5y + 19 = 0$ .

Controimmagine:  $y = 7x - 1$

21) a)  $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x' = -6 - x \\ y' = -y \end{cases}$

22) a)  $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$

c) Componendo, si ottiene  $\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 2 \end{cases}$  che è effettivamente una traslazione,

il cui vettore ha componenti  $(6, 2)$  mentre le componenti di  $\overline{C_1C_2}$  sono  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (3, 1)$

23) La simmetria di centro  $C_1(x_1, y_1)$  ha equazioni:  $\begin{cases} x' = 2x_1 - x \\ y' = 2y_1 - y \end{cases}$

e quella di centro  $C_2(x_2, y_2)$  ha equazioni:  $\begin{cases} x' = 2x_2 - x \\ y' = 2y_2 - y \end{cases}$ .

Componiamole:  $s_1: \begin{cases} x' = 2x_1 - x \\ y' = 2y_1 - y \end{cases}$      $s_2: \begin{cases} x'' = 2x_2 - x' \\ y'' = 2y_2 - y' \end{cases}$

$s_2 \circ s_1: \begin{cases} x'' = 2x_2 - x' = 2x_2 - (2x_1 - x) = 2x_2 - 2x_1 + x = x + 2(x_2 - x_1) \\ y'' = 2y_2 - y' = 2y_2 - (2y_1 - y) = 2y_2 - 2y_1 + y = y + 2(y_2 - y_1) \end{cases}$

e  $\begin{cases} x'' = x + 2(x_2 - x_1) \\ y'' = y + 2(y_2 - y_1) \end{cases}$  è proprio una traslazione, il cui vettore ha componenti  $(2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1))$  che sono proprio le componenti del vettore  $2\overline{C_1C_2}$

24) a)  $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = y \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2 - y \end{cases}$

25) a)  $\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases}$

26) L'affinità composta è  $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases}$ : si tratta effettivamente di una traslazione.

27) Si ottiene  $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

28) Sottoponiamo una delle due curve, ad esempio la  $x^2 + xy = 1$ ,

alla simmetria centrale avente per centro un punto  $(x_0, y_0)$  da determinarsi

(basterà effettuare, nell'equazione della curva, le sostituzioni  $x \rightarrow 2x_0 - x$ ,  $y \rightarrow 2y_0 - y$ ).

Imponiamo poi che l'equazione così ottenuta coincida con l'equazione dell'altra curva.

Otteniamo così un sistema di tre equazioni nelle due incognite  $x_0, y_0$ .

Tale sistema, nonostante il numero delle incognite superi il numero delle equazioni,

è, eccezionalmente, possibile (si usa dire: "compatibile"), per il fatto che l'esercizio era stato costruito "ad hoc",

in modo che le due curve *fossero, effettivamente*, simmetriche rispetto ad un punto.

Si trova  $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

29)  $P_0(2, 3)$

$$30) \text{ a) } \begin{cases} x' = -2x + 9 \\ y' = -2y + 12 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$$

$$31) \text{ a) } \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x + \frac{10}{3} \\ y' = \frac{1}{6}y - \frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{c) } \omega_2 \circ \omega_1 = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3 \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6} = k_1 \cdot k_2; \\ C(6, -3) \text{ che è allineato} \\ \text{con } C_1(1, 2) \text{ e } C_2(4, -1) \end{matrix}$$

32) Le relazioni che fanno passare dalla coppia  $(x, y)$  alla  $(x', y')$  si possono scrivere tenendo conto che:

- il punto medio del segmento  $PP'$  deve appartenere alla  $y = 4x$ :  $\frac{y+y'}{2} = 4 \cdot \frac{x+x'}{2}$
- la retta  $PP'$  dev'essere perpendicolare alla  $y = 4x$  e quindi avere coefficiente angolare  $-1/4$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{4}$$

Ponendo a sistema le due relazioni e risolvendo rispetto a  $x', y'$  si ottiene:

$$\begin{cases} x' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y \\ y' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y \end{cases}$$

Per un controllo di correttezza,  
puoi applicare la trasformazione a qualche punto del piano,  
ad esempio  $O(0, 0)$ ;  $A(1, 4)$ ;  $B(4, -1)$ , od altri.

$$33) \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

$$34) \begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

$$35) \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

Punto unito:  $(-2, -4)$ .

Rette unite:  $r_1: y = -(\sqrt{2} - 1)x - 2(\sqrt{2} + 1)$ ,  $r_2: y = (\sqrt{2} + 1)x + 2(\sqrt{2} - 1)$

36) Semplice: i primi 3 punti sono fra loro allineati, ma allora dovrebbero esserlo anche le rispettive immagini (un'affinità conserva l'allineamento!), mentre non lo sono.

$$37) \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Sono rette unite tutte quelle di coefficiente angolare  $-2$ :  
 $y = -2x + q, q \in \mathbb{R}$

38) Sì:  $a = 2, b = c = 0$

39) Devi considerare una generica affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

due generici punti  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ ,

il punto medio  $M\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$  del segmento  $AB$ ,

poi calcolare le coordinate delle rispettive immagini  $A'$ ,  $B'$  ed  $M'$ ,  
infine trovare le coordinate del punto medio del segmento  $A'B'$   
e constatare che tale punto medio coincide con  $M'$ .