

CENNI DI GEOMETRIA SOLIDA

Così come la geometria piana, anche la solida è stata organizzata dai matematici secondo una struttura “ipotetico-deduttiva”: definizioni, assiomi, teoremi.

Noi qui ci proponiamo di darne una presentazione snella, che attiri l'attenzione sugli aspetti accattivanti di questo splendido argomento, quindi cercheremo un compromesso fra il rigore e la semplicità/brevità, rinunciando deliberatamente a un'esposizione esaustiva, troppo ingombrante per i nostri scopi.

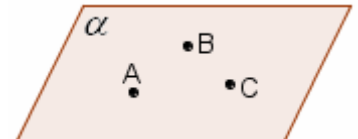
Iniziamo.

1. NOZIONI GENERALI

Un “piano” è un'entità geometrica indicata con una lettera greca e caratterizzata da una famiglia di assiomi: eccone qui di seguito due.

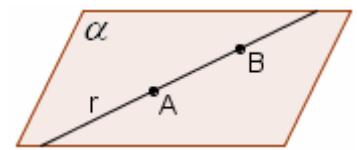
Assioma: per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo (conseguenza: due rette incidenti individuano uno e un solo piano).

Per questo motivo, un piano si può indicare anche tramite una terna di suoi punti non allineati: piano α o piano ABC.

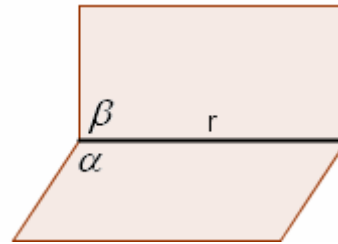
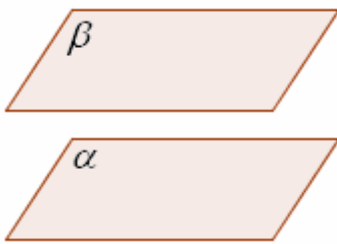


Assioma: se due punti di una retta giacciono su di un piano, anche tutti gli altri punti della retta appartengono a quel piano

Quindi il piano è illimitato in tutte le direzioni: i nostri disegni, per cercare di comunicare l'idea di tridimensionalità nell'ambito bidimensionale del foglio, devono occultare questa caratteristica, che comunque va sempre tenuta presente.

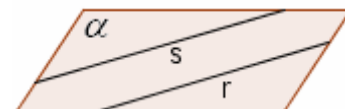


Piani paralleli: non hanno nessun punto in comune, oppure coincidono **Piani incidenti:** non sono paralleli; si può dimostrare che l'insieme dei loro punti comuni è una retta.



Rette sghembe nello spazio: non appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni.

Rette parallele nello spazio: appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni, oppure ne hanno infiniti (coincidono).



Definizione di perpendicolarità retta-piano:

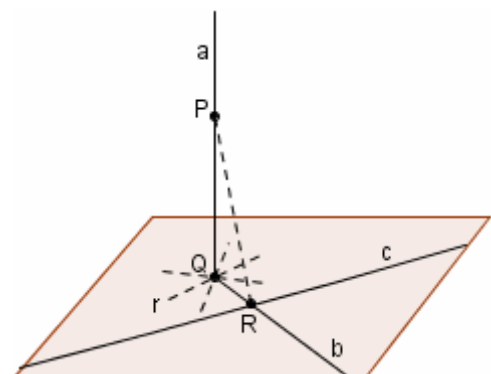
una retta si dice perpendicolare ad un piano se e solo se è perpendicolare a tutte le rette di quel piano, passanti per il punto in cui la retta e il piano si tagliano (ciò avviene senz'altro, come si può dimostrare, ogniquale volta sia noto che è perpendicolare ad almeno due di quelle rette).

(NOTA: quando pensiamo, ad esempio, alla perpendicolarità fra la retta a e la retta r della figura, la pensiamo nell'ambito di quel piano che è individuato dalle due rette in questione a, r)

TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI

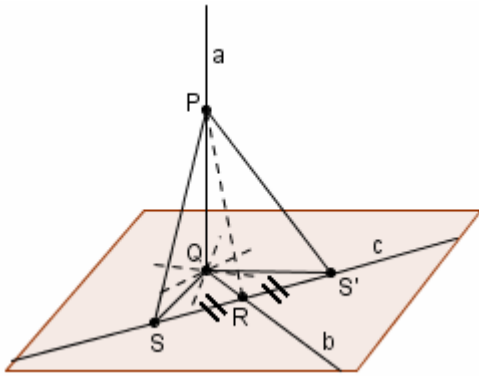
(è sovente utilizzato per giustificare una perpendicolarità in un contesto tridimensionale):

se si conduce una perpendicolare a ad un piano, e dal piede Q di questa si traccia la perpendicolare b ad una terza retta c che giace sul piano, l'ultima retta menzionata (c) risulta perpendicolare al piano individuato dalle prime due ($c \perp PQR$)



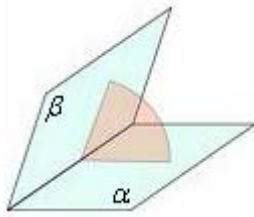
Il Teorema delle Tre Perpendicolari

Dimostrazione del Teorema



Sulla retta c , da parti opposte rispetto a R , prendiamo due punti S ed S' , equidistanti da R : $RS = RS'$.
 Congiungiamo sia Q che P con S e con S' .
 E' $QS = QS'$ perché i due triangoli QRS , QRS' sono uguali per il 1° Criterio; ma allora anche i due triangoli PQS , PQS' sono uguali per il 1° Criterio, e di conseguenza è $PS = PS'$.
 Il triangolo PSS' è dunque isoscele, e pertanto PR , mediana relativa alla base, fa anche da altezza: è perciò $\widehat{PRS} = \widehat{PRS'} = 90^\circ$

e allora la retta c è perpendicolare nel punto R alla retta PR ; ma la retta c era già, nello stesso punto R , appendicolare anche alla retta b ; e quindi c , essendo perpendicolare, nel punto R , a due rette del piano PQR , è perpendicolare a tale piano, come volevasi dimostrare.

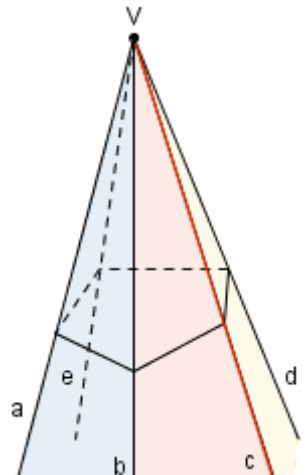


Un angolo fra due piani,
 o “**angolo diedro**”,
 o semplicemente “**DIEDRO**”

(immagine opera di Luca Antonelli,
 da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza
 GFDL, [GNU Free Documentation License](https://www.gnu.org/licenses/gfdl.html))

Qui a destra,
 una figura
 che va pensata estesa
 illimitatamente
 verso il basso,
 detta
 “**ANGOLOIDE**”.

La somma delle ampiezze
 delle facce di un angoloide
 (in questo caso
 abbiamo 5 facce)
 è sempre $< 360^\circ$.



Un “**POLIEDRO**” è un solido delimitato da facce di forma poligonale.

Un poliedro si dice “**regolare**” o “**platonico**” quando le sue facce sono *poligoni regolari*, tutti uguali fra loro.

Si dimostra che **esistono solo 5 tipi di POLIEDRI REGOLARI**:

- il tetraedro regolare,
- l'esaedro regolare o cubo,
- l'ottaedro regolare,
- l'icosaedro regolare,
- il pentadodecaedro regolare.

Le immagini sottostanti
 hanno come autore Cyp
 (GFDL, [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)
 Attribution Non-Commercial
 Share-Alike license version 2.0)



Tetraedro regolare
 (4 facce
 triangolari
 equilateri,
 4 vertici,
 6 spigoli)



Cubo
 (6 facce
 quadrate,
 8 vertici,
 12 spigoli)



Ottaedro regolare
 (8 facce
 triangolari
 equilateri,
 6 vertici,
 12 spigoli)



Pentadodecaedro regolare
 (12 facce
 pentagonali regolari,
 20 vertici, 30 spigoli)



Icosaedro regolare
 (20 facce
 triangolari
 equilateri,
 12 vertici,
 30 spigoli)

Per tutti i poliedri, regolari e non regolari, purché siano “*convessi*” (= senza “*rientranze*”), vale la rilevante

FORMULA DI EULERO:

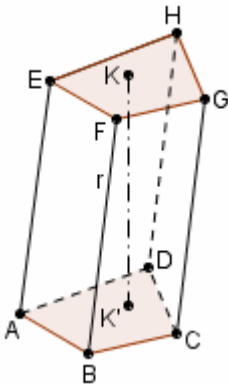
$$f + v = s + 2$$

“ il numero delle facce più quello dei vertici è uguale al numero degli spigoli, più 2 ”

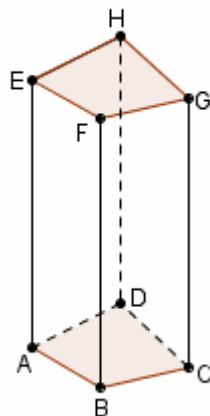
Un “**PRISMA**” è un solido delimitato da due “basi” poligonali uguali e parallele fra loro (= giacenti su piani fra loro paralleli) e da una superficie laterale costituita da parallelogrammi (da rettangoli, se il prisma è “retto”). Si dice “**altezza**” di un prisma, la **distanza** (= segmento di perpendicolare) fra i piani delle due basi.

- **Prisma “retto”**: gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.
- **Prisma “regolare”**: prisma retto, la cui base è un poligono regolare.
- **Parallelepipedo**: prisma le cui 6 facce sono parallelogrammi (a 2 a 2 uguali, e giacenti su piani paralleli)
- **Parallelepipedo rettangolo**: le facce sono 6 rettangoli (è la tipica forma di una “scatola”).

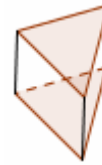
Un **prisma non retto**
e una sua altezza
KK'



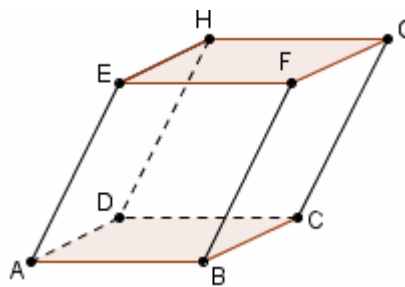
Un **prisma retto**;
 $EA = FB = GC = HD$
ne sono altezze



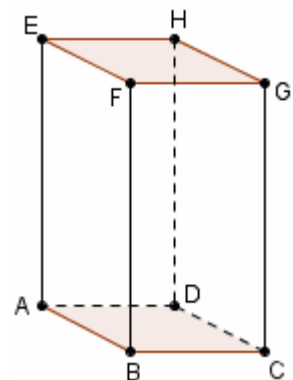
Qui a fianco,
un **prisma regolare**
avente per base
un triangolo
equilatero



Un **parallelepipedo generico**

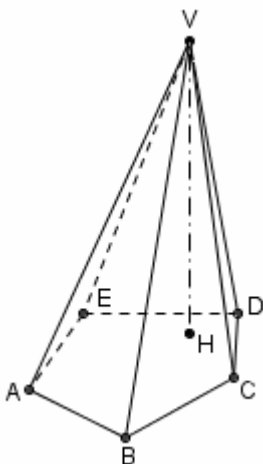


Un **parallelepipedo rettangolo**

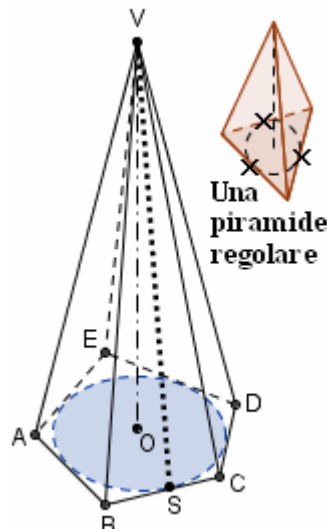


Una “**PIRAMIDE**” è un solido delimitato da una “base” poligonale e da una superficie laterale formata da triangoli, ottenuti congiungendo un punto V (“vertice”) coi vertici della base. Si dice “**altezza**” di una piramide, la **distanza fra il vertice e il piano della base**.

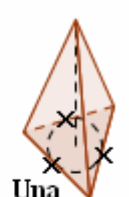
- **Piramide “retta”**: la sua base è un poligono *circoscrivibile ad una circonferenza*, e inoltre l'altezza della piramide ha il suo piede *proprio nel centro* di questa circonferenza
- In una *piramide retta*, le altezze dei triangoli che formano la superficie laterale sono *tutte uguali* fra loro: una qualsiasi di queste altezze uguali si dice “**apotema**” della piramide.
Ribadiamolo: il concetto di “*apotema*” di una piramide *NON* ha senso per una piramide *qualsiasi*, ma solo per una *piramide retta*.
- **Piramide “regolare”**: è una piramide retta, avente per base un poligono regolare
- **Tronco di piramide**: si ottiene intersecando una piramide con un piano parallelo alla base



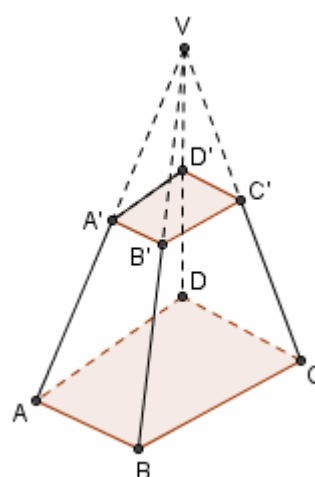
Una **piramide generica**
con la sua
altezza VH



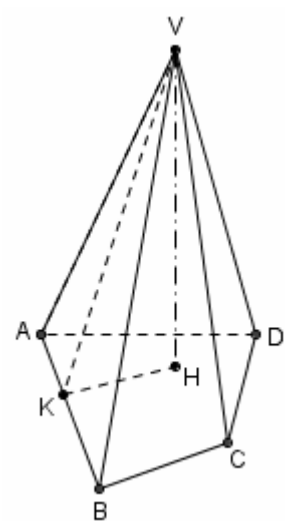
Una **piramide retta**;
VS è uno dei suoi apotemi.



Una **piramide regolare**



Un **tronco di piramide**
(è come se fosse la
differenza di due piramidi!)



Delle 5 figure, quella più a destra si riferisce al seguente enunciato: “In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB”. Dà, che qualcosa di già visto ti consente di dimostrarlo!