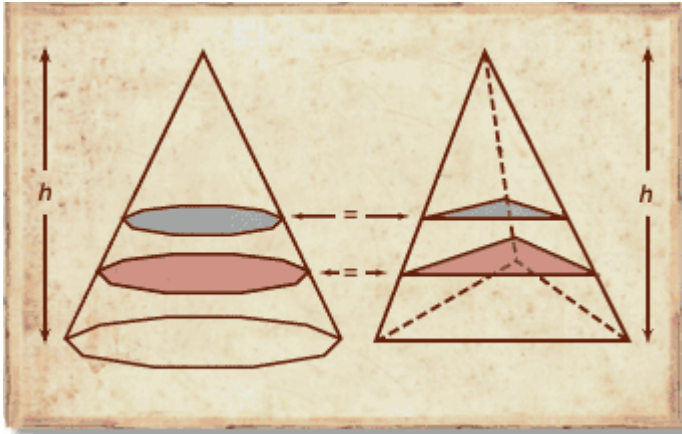


4. IL PRINCIPIO DI CAVALIERI E LA SUA APPLICAZIONE AL CALCOLO DEI VOLUMI DI PRISMI, CILINDRI, PIRAMIDI E CONI

ASSIOMA: il “PRINCIPIO DI CAVALIERI” (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)

“ Se due solidi possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli, ciascun piano individua sui due solidi due sezioni equivalenti (= con la stessa area), allora i due solidi sono equivalenti (= hanno ugual volume) ”



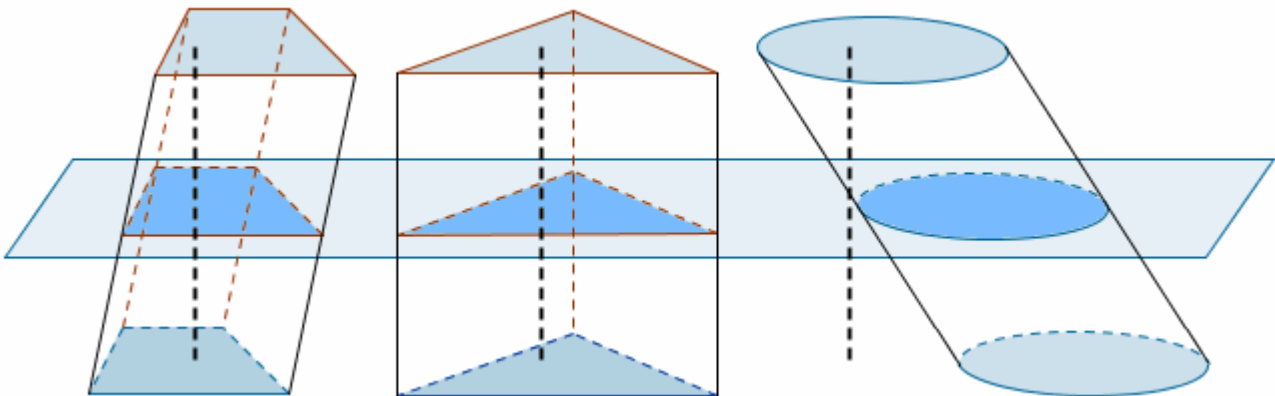
© 2000 Encyclopædia Britannica, Inc.



(immagine opera di Anton,
da Wikimedia Commons,
qui utilizzata con licenza
GFDL, GNU Free Documentation License)

Teorema 1: due prismi, o un prisma e un cilindro, o due cilindri, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto (intuitivo, ma comunque dimostrabile) che le sezioni di un prisma, o di un cilindro, con piani paralleli alle basi, sono tutte uguali (fra loro e con le basi)

CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UN PRISMA O DI UN CILINDRO

Un prisma è dunque, in particolare, equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del prisma.

E anche un cilindro è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del cilindro.

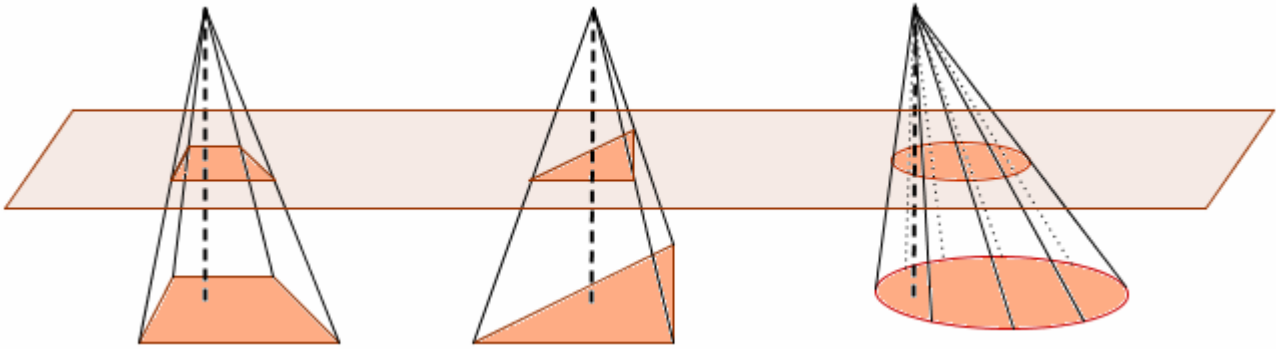
Quindi per calcolare il volume di un prisma qualsiasi o di un cilindro qualsiasi la formula da utilizzare è la stessa che abbiamo visto (paragrafo 3) valere per il parallelepipedo rettangolo, ossia

$$V = S_{\text{base}} \cdot \text{altezza}$$

che nel caso di un *cilindro*, retto o non retto, a base circolare di raggio r , diventa $V = \pi r^2 \cdot h$

Teorema 2: due piramidi, o una piramide e un cono, o due coni, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto che date due piramidi, o due coni, o una piramide e un cono, se i due solidi hanno ugual altezza e basi equivalenti, sezionando i due solidi con due piani aventi ugual distanza dal vertice, si ottengono sezioni fra loro equivalenti (questo è conseguenza dell'ultimo teorema del paragrafo 2).

Teorema

Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione

Possiamo pensare di sostituire qualunque piramide assegnata, con una qualsiasi piramide a base triangolare, purché tale seconda piramide abbia altezza uguale e base equivalente a quella della piramide originaria. Infatti la "vecchia" piramide e quest'altra "nuova" saranno equivalenti per il precedente Teorema 2; mentre il Teorema 1 ci assicura che prismi con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

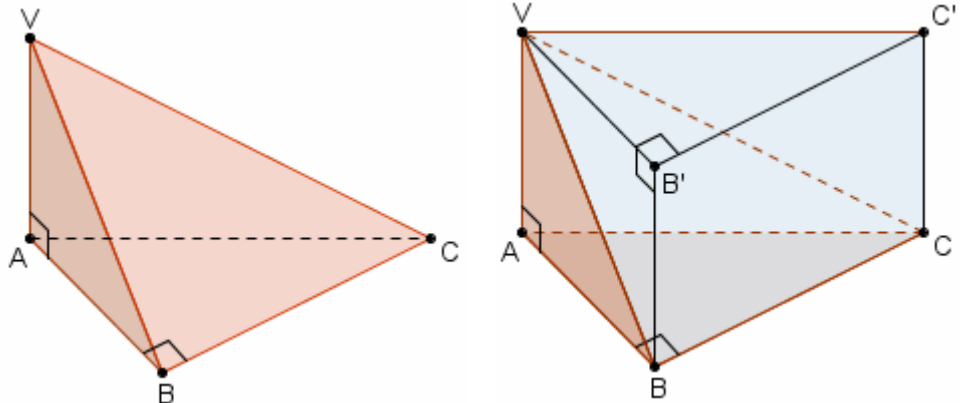
Noi supporremo che la "nuova" piramide, equivalente alla "vecchia", abbia

- come base un triangolo rettangolo
- e il vertice tale che la sua proiezione sul piano della base cada proprio nel vertice di uno degli angoli acuti del triangolo di base

(in realtà, nessuna di queste due condizioni è indispensabile per la dimostrazione, tuttavia in questo modo la comprensione dei disegni dovrebbe probabilmente risultare meno difficoltosa).

Partiamo dunque dalla piramide $ABCV$ della figura qui a destra, e innanzitutto costruiamo il prisma $ABCC'B'V$ avente base ABC e altezza AV .

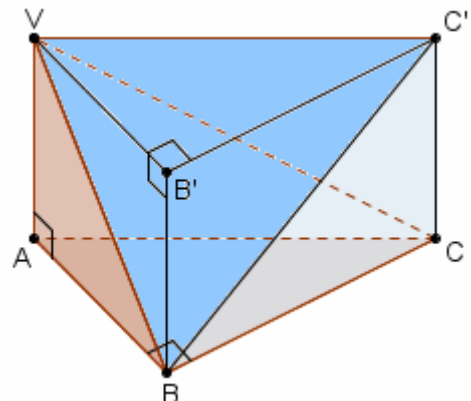
Ci proponiamo di dimostrare che la piramide $ABCV$ è la terza parte del prisma $ABCC'B'V$.

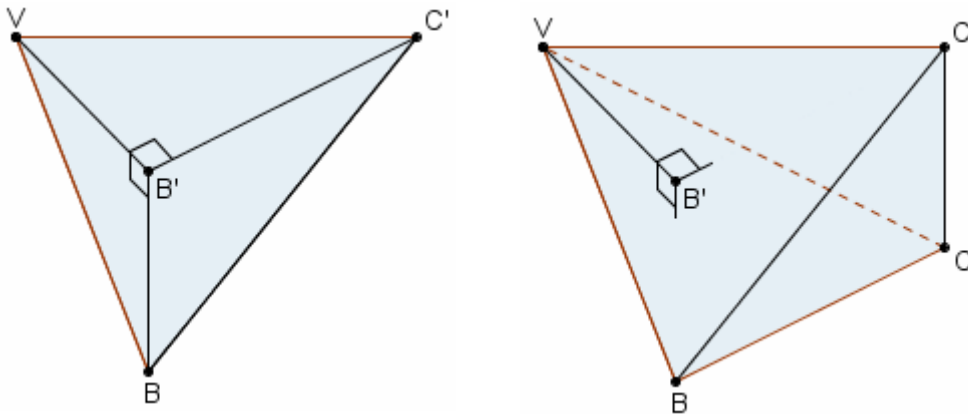


In pratica, alla piramide è stato aggiunto il solido $BCC'B'V$, che ha forma di piramide a base rettangolare.

Adesso tracciamo la diagonale BC' del rettangolo $BCC'B'$, che è la base del solido piramidale $BCC'B'V$ che abbiamo aggiunto alla piramide iniziale; il piano passante per i 3 punti B , C' e V divide la piramide a base rettangolare $BCC'B'V$ in due piramidi a base triangolare, che sono $BC'B'V$ e $BCC'V$.

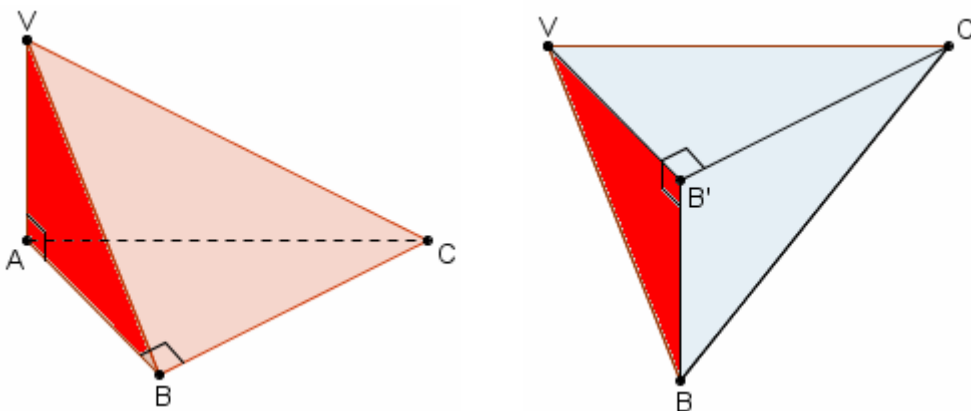
La prima è facile da visualizzare, la seconda un po' meno: penso saranno utili le due figure seguenti, che mostrano tali due piramidi singolarmente:





Nella seconda figura abbiamo lasciato anche il segmento VB' , per evidenziare che esso fa da altezza per *entrambe* le piramidi se ne prendiamo come basi $BC'B'$ e BCC' rispettivamente; ma allora, dato che i due triangoli $BC'B'$ e BCC' sono uguali fra loro in quanto ottenuti dividendo un rettangolo con una sua diagonale, le due piramidi, per avere ugual base e uguale altezza, **sono equivalenti**.

Riconsiderando ora la piramide $ABCV$ di partenza, scopriamo che essa è equivalente alla $BC'B'V$ perché

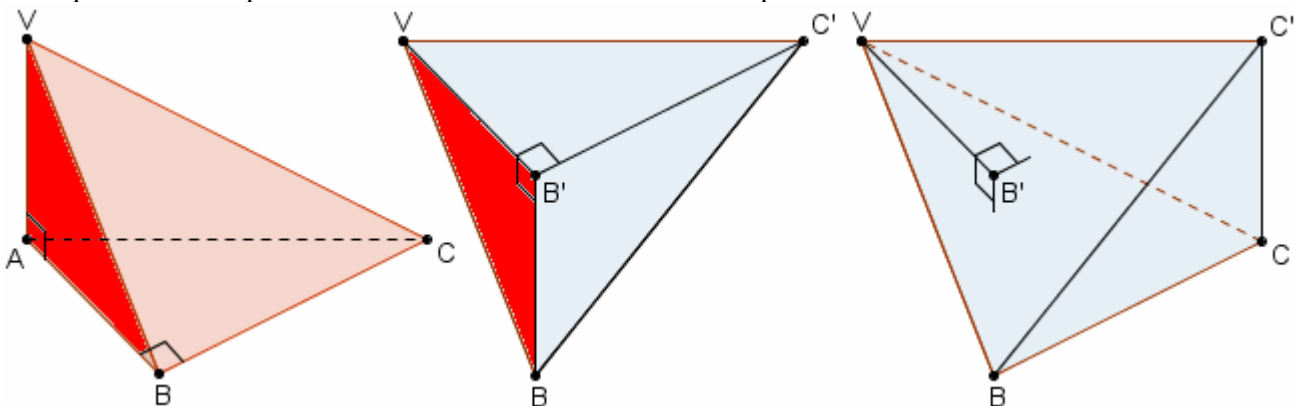


se si prendono per basi ABV e $BB'V$ rispettivamente, le altezze corrispondenti sono CB e $C'B'$, ed essendo

- $ABV = BB'V$ (triangoli in cui un rettangolo viene spezzato da una diagonale)
- e $CB = C'B'$ (lati opposti di un rettangolo),

$ABCV$ e $BC'B'V$ hanno ugual base e uguale altezza.

Ma allora il prisma $ABCC'B'V$, avente la stessa base e la stessa altezza della piramide iniziale $ABCV$, è composto dalle tre parti $ABCV + BC'B'V + BCC'V$ tutte equivalenti fra loro!



Ciascuna delle tre parti è perciò $\frac{1}{3}$ del prisma; in particolare, $ABCV = \frac{1}{3} ABCC'B'V$ e la tesi è dimostrata.

CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE O DI UN CONO

Poiché dunque una piramide, o un cono, hanno volume uguale a $\frac{1}{3}$ del volume di un prisma che ha base equivalente e altezza uguale, per calcolare il volume di una piramide o di un cono la formula da utilizzare sarà

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = \frac{S_{\text{base}} \cdot \text{altezza}}{3}$$