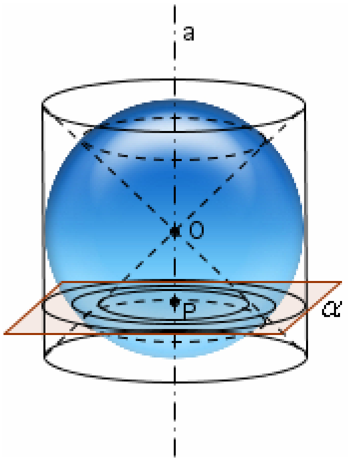
5. IL VOLUME DELLA SFERA

Teorema: il volume di una sfera è dato da $\frac{4}{3}\pi r^3$



Dimostrazione

"Incastriamo"
(in geometria si dice: "inscriviamo")
la sfera di raggio r in un cilindro retto,
che avrà dunque il diametro delle basi e l'altezza
entrambi uguali al diametro della sfera.

I due coni aventi per vertice il centro della sfera
e aventi per basi le due basi del cilindro
formano un solido simile ad una clessidra.

Pensiamo ora **allo strano solido ottenibile prendendo il cilindro e togliendogli i punti della clessidra: chiameremo questo solido "anticlessidra".**

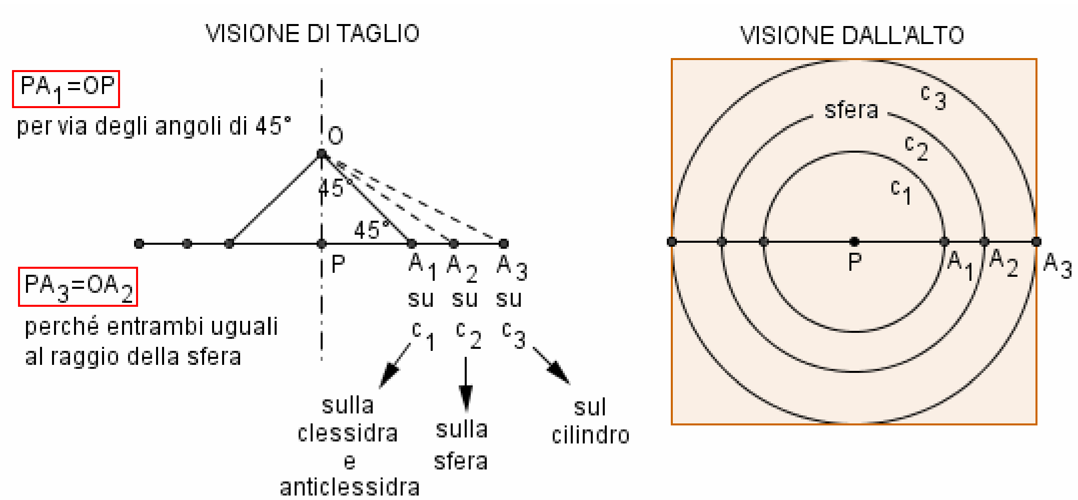
Perché mai ci interessa l' "anticlessidra"?
Perché **ci proponiamo di dimostrare che tale anticlessidra è equivalente alla sfera**!!!

Infatti, consideriamo un piano α che intersechi perpendicolarmente, all'interno del cilindro, l'asse di simmetria a della figura.
Su tale piano

- la sfera staccherà un cerchio (avente come contorno la circonferenza *intermedia* nella figura)
- l'anticlessidra staccherà una corona circolare (compresa fra le circ. *più interna* e *più esterna* della figura).

Ci basterà perciò dimostrare che il cerchio e la corona circolare sono equivalenti,
per poter affermare, grazie al Principio di Cavalieri, l'equivalenza fra la sfera e l'anticlessidra.

A tale scopo, immaginiamo di guardare la figura "di taglio", con gli occhi giusto all'altezza del piano α.



$$\textit{Area cerchio entro } c_2 = \boxed{\pi \cdot \mathrm{PA}_2^2}$$

$$\textit{Area corona tra } c_1 \textit{ e } c_3 = \pi \cdot \mathrm{PA}_3^2 - \pi \cdot \mathrm{PA}_1^2 = \pi \cdot \left(\mathrm{PA}_3^2 - \mathrm{PA}_1^2\right) \overset{\text{NOTA}}{=} \pi \cdot \left(\mathrm{OA}_2^2 - \mathrm{OP}^2\right) \overset{\text{PITA-GORA}}{=} \boxed{\pi \cdot \mathrm{PA}_2^2}$$

NOTA: $\mathrm{PA}_3 = \mathrm{OA}_2$, $\mathrm{PA}_1 = \mathrm{OP}$ (vedi annotazioni sulla figura)

Allora per calcolare il volume della sfera basterà calcolare il volume dell'anticlessidra,
a sua volta uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello della clessidra.

$$\boxed{\textit{Volume sfera}} = \boxed{\textit{Volume anticlessidra}} = \textit{Volume cilindro} - \textit{Volume clessidra} =$$
$$= \textit{Volume cilindro} - 2 \cdot \textit{Volume di un cono} =$$
$$= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{6-2}{3}\pi r^3 = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$