

## IL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

**SE una proprietà  $P(x)$ , il cui insieme ambiente sia  $\mathbb{N}$ :**

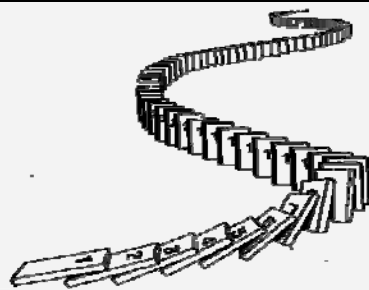
- **vale per il numero 0**
- **e, nel caso valga per un numero naturale  $x$ , vale certamente anche per il successivo  $x + 1$**

**ALLORA quella proprietà vale per ogni numero naturale.**

Per dimostrare, applicando il P.I.M., che una data proprietà  $P(x)$  è valida per ogni  $x$  appartenente ad  $\mathbb{N}$ , si procede nel modo seguente:

- a) si verifica che la proprietà  $P(x)$  vale con  $x = 0$ ;
- b) si suppone, come ipotesi di lavoro ("ipotesi induttiva") che la proprietà valga con  $x = k$ , e si dimostra che, sotto questa ipotesi, dovrà necessariamente valere anche con  $x = k + 1$ .

Un'ovvia variante consiste nel "partire da 1" anziché da zero.



Questa suggestiva figura viene dal sito

[www.parabola.unsw.edu.au](http://www.parabola.unsw.edu.au)

- Dimostriamo che  $\forall x \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$  tramite il "Principio di Induzione Matematica" (precisamente, la sua variante in  $\mathbb{N}^*$ , ossia la variante che parte da 1 anziché da 0)

- a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con  $x = 1$ ?

Vediamo: con  $x = 1$ , l'uguaglianza da dimostrare diventa  $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$  che è vera! OK!

- b) Supponiamo ora che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con  $x = k$ : supponiamo cioè che si abbia

$$(*) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{"IPOTESI INDUTTIVA"}$$

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per  $x = k + 1$ ?

Partiamo dal 1° membro dell'uguaglianza da dimostrare, ponendo  $x = k + 1$ . Il nostro obiettivo è di controllare se il valore dell'espressione così ottenuta equivale a  $\left[ \frac{x(x+1)}{2} \right]_{\text{con } x=k+1}$ . Avremo:

$$\begin{aligned} [1 + 2 + 3 + \dots + x]_{\text{con } x=k+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) \stackrel{\text{per la } (*)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \left[ \frac{x(x+1)}{2} \right]_{\text{con } x=k+1} \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Pertanto: l'uguaglianza da dimostrare è vera con  $x = 1$ , e, qualora sia vera con  $x = k$ , continua certamente a valere anche per  $x = k + 1$ : è perciò vera per  $x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, \dots$ . Insomma, con un "effetto domino" cui si ispira la figura in alto, è vera per ogni numero naturale non nullo  $x$ .

- Dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  col "P.I.M." Qui usiamo  $n$  anziché  $x$ : fa niente, vero? ☺

Anche in questo caso, evidentemente, partiremo da 1 anziché da 0.

- a) L'uguaglianza da dimostrare è verificata con  $n = 1$ ? Con  $n = 1$ , essa diventa  $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6}$ , OK!

- b) Supponiamo che l'uguaglianza da dimostrare sia vera con  $n = k$ : supponiamo cioè che si abbia

$$(*) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{"IPOTESI INDUTTIVA"}$$

Ci chiediamo: essa sarà ancora vera anche per  $n = k + 1$ ?

$$\begin{aligned} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2]_{\text{con } n=k+1} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \stackrel{\text{per la } (*)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]_{\text{con } n=k+1} \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Il P.I.M. ci consente a questo punto di affermare che l'uguaglianza proposta è effettivamente vera per ogni numero naturale non nullo  $n$ .

□ Applicando il “Principio di Induzione Matematica”, dimostriamo che:

$\forall n \in \mathbb{N}$ , se un insieme  $A$  ha  $n$  elementi, il suo insieme delle parti  $P(A)$  ha  $2^n$  elementi.

a) La proprietà da dimostrare è vera per  $n = 0$  ?

Nel caso  $n = 0$ , l'insieme  $A$  è privo di elementi:  $A = \emptyset$ .

L'insieme  $P(A)$  è dunque, in questo caso,  $P(\emptyset)$ ,

vale a dire l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi dell'insieme vuoto.

Ma l'insieme vuoto ha *uno e un solo* sottoinsieme: sé stesso.

Perciò  $P(A) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$  (l'insieme, il cui unico elemento è l'insieme vuoto).

L'insieme  $A$  conteneva  $n = 0$  elementi; abbiamo visto che  $P(A)$  contiene 1 elemento.

Ma  $1 = 2^0$ . Perciò la proprietà da dimostrare è vera quando  $n = 0$ .

b) Supponiamo che la proprietà da dimostrare sia vera per un certo numero naturale  $k$ : supponiamo cioè che, ogniqualvolta un insieme  $A$  contiene  $k$  elementi, il suo insieme delle parti  $P(A)$  contenga  $2^k$  elementi (in altre parole: supponiamo che un insieme di  $k$  elementi abbia sempre  $2^k$  sottoinsiemi).

*Questa è la nostra ipotesi induttiva: “se un insieme  $A$  contiene  $k$  elementi, allora ha  $2^k$  sottoinsiemi”.*

Vogliamo ora far vedere che, sotto tale ipotesi, la proprietà deve continuare a valere anche per  $k+1$ , ossia: che “un insieme contenente  $k+1$  elementi deve avere necessariamente  $2^{k+1}$  sottoinsiemi”.

In effetti: un insieme  $B$  che abbia  $k+1$  elementi, può essere pensato come ottenibile a partire da un insieme  $A$  contenente  $k$  elementi, al quale venga aggiunto un nuovo elemento  $w$ .

Ora, per contare i sottoinsiemi di  $B = A \cup \{w\}$ , possiamo suddividerli in *due categorie*:

- quelli che non contengono  $w$
- e quelli che contengono  $w$

Ma i sottoinsiemi della prima categoria sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $A$ !

Quindi il loro numero è, per l'ipotesi induttiva,  $2^k$ .

Pensiamo ora ai sottoinsiemi della seconda categoria. Osserviamo che se prendiamo uno di questi sottoinsiemi, e gli togliamo  $w$ , otterremo un sottoinsieme di  $A$ !

Quindi i sottoinsiemi della seconda categoria sono tutti e soli quegli insiemi, ottenibili partendo da uno dei  $2^k$  sottoinsiemi di  $A$ , e aggiungendogli l'elemento  $w$ .

Pertanto anche i sottoinsiemi della seconda categoria sono  $2^k$  (tanti quanti i sottoinsiemi di  $A$ ).

E in totale, i sottoinsiemi di  $B$  saranno dunque  $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ .

La dimostrazione è così completata.

Il “Principio di Induzione Matematica” non è, evidentemente, uno strumento adatto a “ricavare” formule; semmai, serve per dimostrare “A POSTERIORI” la validità generale di una formula, o di una regola, che sia stata precedentemente ipotizzata o intuita sulla base di esempi, o con ragionamenti vari.

**ESERCIZI** (verrà sempre utilizzata la lettera  $n$  al posto di  $x$  per indicare il generico intero: per gli interi è consuetudine impiegare preferibilmente lettere centrali dell'alfabeto, come  $n, m, i, k \dots$ )

Utilizzando il Principio di Induzione Matematica, dimostra che:

1)  $\forall n \geq 0, 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2)  $\forall n \geq 1, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$     3)  $\forall n \geq 1, 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

4)  $\forall n \geq 0, 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$  ( $a \in \mathbb{R}, a \neq 1$ )    5)  $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

6)  $\forall n \geq 1, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

7)  $\forall n \geq 1, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \dots$  Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

8)  $\forall n \geq 2, \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \dots$  Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

9)  $\forall n \geq 1, \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \dots$  Completa la formula, dimostrala col P.I.M.

10) Se ci sono  $n$  persone e ognuna stringe la mano a ciascuna delle altre, quante strette si avranno? Verifica la validità, per ogni  $n$ , dell'espressione trovata, servendoti del P.I.M.

11) Qualunque sia l'intero  $n$ , il numero  $n^2 + n$  è sempre pari. Giustifica l'affermazione come ti garba, poi verificala ulteriormente servendoti del P.I.M.

12) Un poligono di  $n$  lati ha  $\frac{n(n-3)}{2}$  diagonali. Dimostra col P.I.M. questa affermazione.