

GEORG CANTOR (1845-1918) E I "GRADI DI INFINITO"

Il sommo matematico Hilbert descrisse l'opera di Cantor come

"... il prodotto più raffinato del genio matematico e una delle conquiste più alte del puro intelletto"

Le poche pagine che seguono vogliono essere una breve introduzione alle affascinanti intuizioni di questo brillante e innovativo pensatore.

1)

RIPASSO: INSIEMI E SOTTOINSIEMI

Cos'è un "insieme"?

E' un "gruppo", una "raccolta", di oggetti (concreti o astratti, non importa se della stessa natura oppure no).

Questi sono chiamati "gli elementi" dell'insieme considerato.

Si scrive $x \in A$ per indicare che l'elemento x "appartiene" all'insieme A .

Un "sottoinsieme" B di un insieme A è una "parte" di A ; è un insieme tale che, se $x \in B$, allora $x \in A$.

La scrittura $B \subseteq A$ significa: B è un sottoinsieme di A ($= B$ è "incluso" in A).

Ad esempio, se $A = \{x, y, z\}$, allora i sottoinsiemi di A sono: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\} = A$ (dove il simbolo $\emptyset$ indica l'insieme vuoto, quello privo di elementi).

Fra i sottoinsiemi di un insieme A c'è sempre anche A stesso.

Si dice che A è un sottoinsieme "improprio" di sé stesso;

i sottoinsiemi "propri" di A sono, invece, quelli che non riempiono tutto A .

Fra i sottoinsiemi propri di un insieme A qualsiasi c'è sempre l'insieme vuoto, con una sola eccezione: se A è l'insieme vuoto, allora non ha alcun sottoinsieme proprio.

2)

CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE

Si dice che vi è una "corrispondenza biunivoca" fra due insiemi A, B

quando accade che ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B , E VICEVERSA.

Sinonimo di "corrispondenza biunivoca" è "biiezione".

3)

INSIEMI EQUIPOTENTI

Si dice che due insiemi A e B sono fra loro "equipotenti"

se esiste una corrispondenza biunivoca (una "biiezione") fra A e B .

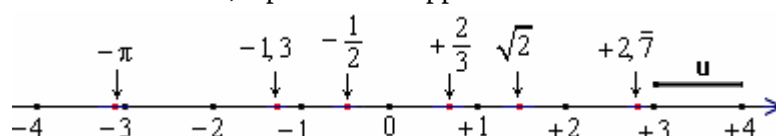
4)

NUMERI RAZIONALI, IRRAZIONALI, REALI

Esistono numeri che NON possono essere scritti sotto forma di frazione (= rapporto fra due interi).

Essi sono detti numeri "irrazionali". Esempi: $\sqrt{2}$, π , tutti i decimali illimitati non periodici.

L'insieme che comprende sia i numeri razionali che gli irrazionali viene detto "insieme dei numeri *reali*", è indicato col simbolo $\mathbb{R}$, e può essere rappresentato su di una "number line":



Su di una *number line*, ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto

e, viceversa, ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale.

Quindi fra la *number line*, pensata come insieme di punti, e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, c'è una "corrispondenza biunivoca" o "biiezione": si tratta di due insiemi *equipotenti*.

5)

TEOREMA ("Paradosso di Galileo")

L'insieme $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ di tutti gli interi assoluti (= senza segno) maggiori di 0

è equipotente con l'insieme $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ dei soli interi assoluti pari, maggiori di 0.

Dimostrazione:

1	2	3	4	5	6	7	...	n	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
2	4	6	8	10	12	14	...	$2n$	...

Osserviamo che quest'ultimo insieme è un sottoinsieme "proprio" del primo,

ossia un sottoinsieme che non lo "riempie" completamente, che ha degli elementi *in meno* rispetto a quello ...

Nonostante ciò, il teorema ci dice che i due insiemi possono essere posti in corrispondenza biunivoca, come le asole e i bottoni di una stessa camicia. E quando due insiemi sono in corrispondenza biunivoca, viene spontaneo pensare che gli elementi dell'uno sono *tanti, quanti gli elementi dell'altro* ...

... MUMBLE, MUMBLE ... TUTTO QUESTO E' DAVVERO SINGOLARE! ...

6)

INSIEMI INFINITI

Quanto precede suggerisce un'idea per formulare una definizione rigorosa di insieme "infinito".

DEFINIZIONE

Si dice che un insieme è "infinito" se è equipotente con un suo sottoinsieme "proprio", ossia: con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.

Se un insieme non è "infinito", si dirà "finito".

7)

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ è equipotente con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

(pertanto, pure $\mathbb{N}$ ed $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ sono fra loro equipotenti).

Dimostrazione

Del tutto analoga a quella del teorema 5)

8)

Tutti gli insiemi menzionati al punto 7) sono equipotenti con l'insieme degli interi relativi

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Dimostrazione

1	2	3	4	5	6	7	...	2n	2n+1	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	↕	
0	1	-1	2	-2	3	-3	...	n	-n	...

9)

DEFINIZIONE DI NUMERO CARDINALE

Si dice "numero cardinale" quell'entità astratta, quel "quid", che è comune a tutti gli insiemi che sono equipotenti con un insieme dato.

Un numero cardinale si dice "infinito" o "finito"

a seconda che tale sia uno qualunque fra gli insiemi che lo "rappresentano"

(si dimostra che la definizione è corretta, nel senso che non dipende dallo specifico insieme che viene utilizzato per "rappresentare" il particolare numero cardinale che si vuole considerare).

Il numero cardinale che è rappresentato

dall'insieme $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

viene indicato col simbolo $\aleph_0$

[leggi: aleph zero, aleph con zero;

"aleph" ($\aleph$) è la prima lettera dell'alfabeto ebraico].

$\aleph_0$, l'entità astratta che è comune a tutti gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}^*$,

è chiamato

"LA CARDINALITÀ DEL NUMERABILE",

o anche: "LA POTENZA DEL NUMERABILE".

Se il numero cardinale (= la "cardinalità")

associato a un determinato insieme è $\aleph_0$,

allora si suol dire che quell'insieme è "numerabile".

Quante sono
le stagioni
dell'anno? **4**

Quante sono
le dita
di una mano? **5**

"Quanti sono"
i numeri
interi assoluti? **$\aleph_0$**

"Quanti sono"
i numeri
interi relativi? **$\aleph_0$**

10)

CONFRONTO, SOMMA, PRODOTTO DI DUE NUMERI CARDINALI

Siano A, B due insiemi di cardinalità a, b rispettivamente: $\text{card}(A) = a$, $\text{card}(B) = b$.

□ Diciamo che $a < b$ se

- A è equipotente con un sottoinsieme di B
- e invece B non è equipotente con nessun sottoinsieme di A.

□ Dati due numeri cardinali a, b, chiamiamo "SOMMA" di a con b ($a+b$)

il numero cardinale dell'insieme $A \cup B$, ammesso che si abbia $\text{card}(A) = a$, $\text{card}(B) = b$, e che A, B siano fra loro "disgiunti", cioè non abbiano nessun elemento in comune ($A \cap B = \emptyset$).

□ Dati due numeri cardinali a, b, chiamiamo "PRODOTTO" di a con b ($a \cdot b$, ab)

il numero cardinale dell'insieme $A \times B$ (che è poi il "prodotto cartesiano" di A con B, ossia l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (x, y) che si possono costruire prendendo come primo termine della coppia un elemento di A, come secondo termine un elemento di B); purché, ovviamente, sia $\text{card}(A) = a$, $\text{card}(B) = b$.

Si dimostra che le due definizioni date di somma e prodotto di numeri cardinali sono corrette, in quanto non dipendono dagli specifici insiemi che vengono utilizzati per "rappresentare" i cardinali in gioco.

11)

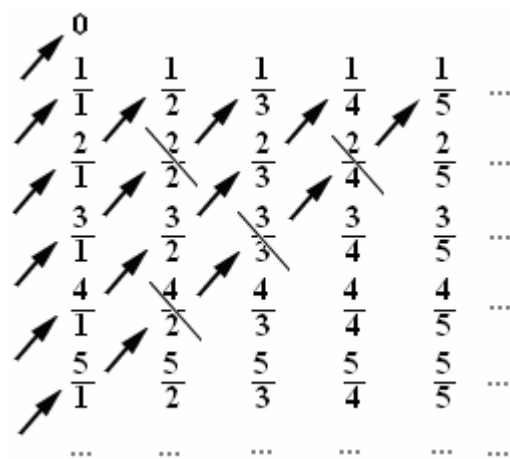
TEOREMA

L'insieme $\mathbb{Q}_a$ dei numeri razionali assoluti è anch'esso equipotente con $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, perciò ha anch'esso la "potenza del numerabile" $\aleph_0$: insomma, $\text{card}(\mathbb{Q}_a) = \text{card}(\mathbb{N}^*) = \aleph_0$.

Per la dimostrazione, vedi la figura qui a destra (nella quale le frazioni soppresse sono quelle semplificabili, ossia non ridotte ai minimi termini).

Il percorso scelto per passare in rassegna, uno dopo l'altro, tutti i numeri razionali assoluti, definisce la corrispondenza biunivoca

0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{5}$	...	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	...



12)

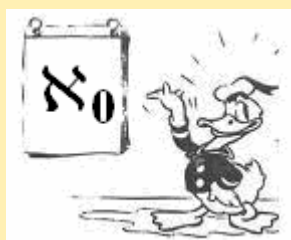
TEOREMA

Pure l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali relativi è equipotente con $\mathbb{N}^*$ (quindi anche con $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Z}$, ...) perciò ha cardinalità $\aleph_0$ ossia è "numerabile".

Per la dimostrazione, vedi lo schema qui sotto.

	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{3}$	-4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	...
0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	$\mathbb{N}^*$:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Pollice	Indice	Medio	Anulare	Mignolo	$\mathbb{Z}$:	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Vista	Udito	Olfatto	Gusto	Tatto	$\mathbb{Q}_a$:	0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
...	...	...	...	...	$\mathbb{Q}$:	0	-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3	3	$-\frac{1}{3}$	...
						$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
						...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



13) TEOREMI: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$; $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (ne omettiamo la semplice dimostrazione)

14)

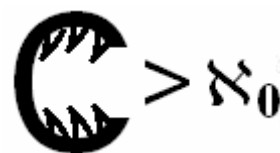
Sorprendentemente, non è vero che qualsiasi insieme infinito debba per forza essere equipotente con $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Q}$, ecc. Esistono insiemi il cui numero cardinale è MAGGIORE di $\aleph_0$!!!

TEOREMA

Non può esistere nessuna corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}_a$ dei numeri reali assoluti e l'insieme $\mathbb{N}^*$.

Quindi $\mathbb{R}_a$ NON è "numerabile", NON ha cardinalità $\aleph_0$: ha invece cardinalità MAGGIORE di $\aleph_0$, ha un "grado di infinito" maggiore di quello che caratterizza gli interi assoluti, gli interi relativi, i razionali.

Il numero cardinale associato all'insieme $\mathbb{R}_a$ è detto "POTENZA DEL CONTINUO", e indicato col simbolo c .



Per dimostrare questo teorema si ragiona *per assurdo*. Se esistesse una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}_a$ e $\mathbb{N}^*$, allora gli elementi di $\mathbb{R}_a$ potrebbero essere elencati in una lista recante

- in prima colonna i numeri 1, 2, 3, 4, ...
- e in seconda colonna tutti i reali assoluti (del tipo PARTE INTERA / VIRGOLA / PARTE DECIMALE)

PRIMA COLONNA	S E C O N D A C O L O N N A						
1	a,	a₁	a₂	a₃	a₄	a₅	...
2	b,	b₁	b₂	b₃	b₄	b₅	...
3	c,	c₁	c₂	c₃	c₄	c₅	...
4							
...							
n	ψ,	ψ₁	ψ₂	ψ₃	ψ₄	ψ₅	...
...							

Sennonché, andiamo a considerare il numero reale α definito in questo modo:

- la parte intera di α è 2 ($\alpha = 2, \dots$);
- l'n-esima cifra dopo la virgola di α è:
 - 1, se l'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero in seconda colonna è diversa da 1
 - 0, se l'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero in seconda colonna è uguale a 1.

Per il modo in cui è "strutturata" la sua definizione, α NON PUO' comparire nella colonna dei numeri reali (infatti, qualunque sia n, non può trovarsi all'n-esima posizione nella lista in quanto differisce dall'n-esimo numero reale della lista se non altro per l'n-esima cifra decimale);

quindi la corrispondenza definita dalla tabella ... NON E' biunivoca !!!

NOTA - Il procedimento seguito si dice "procedimento (o metodo) diagonale"

15) TEOREMI (ne omettiamo la dimostrazione)

Gli insiemi $\mathbb{R}_a$ dei reali assoluti e $\mathbb{R}$ dei reali relativi si possono porre in corrispondenza biunivoca tra loro, quindi hanno la stessa cardinalità c.

Anche ogni intervallo numerico - aperto, chiuso, limitato, illimitato che sia - ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}_a$ e di $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali ha cardinalità c.

L'insieme dei punti di un segmento, o di un quadrato, o di un cubo, o di una retta, o di un piano, o dello spazio tridimensionale, hanno tutti la stessa cardinalità di $\mathbb{R}_a$ e di $\mathbb{R}$, che è poi la "potenza del continuo" c.

"Quanti sono" i numeri razionali?

$\aleph_0$

"Quanti sono" i numeri irrazionali?

c

"Quanti sono" i numeri reali?

c

"Quanti sono" i punti dello spazio?

c

16) TEOREMA

Dato un qualunque insieme A, il suo "INSIEME DELLE PARTI" P(A), ossia l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A, HA SEMPRE CARDINALITÀ MAGGIORE DELLA CARDINALITÀ DI A.

Dimostrazione

Per assurdo, supposto che esista una biiezione $f: A \leftrightarrow P(A)$, allora, preso un elemento x di A, $f(x)$ sarà un sottoinsieme di A e si verificherà uno e uno solo dei casi: $x \in f(x)$ o $x \notin f(x)$.

Definiamo l'insieme $B \subseteq A$ come segue:

$B = \{x \in A / x \notin f(x)\}$ = l'insieme formato da quegli elementi di A, che

NON appartengono all'insieme che loro corrisponde nella biiezione f .

Ora pensiamo alla "controimmagine" di B, ossia all'elemento $\bar{x} \in A$, tale che $f(\bar{x}) = B$.

Ci sono due possibilità: $\bar{x} \in f(\bar{x}) = B$ o $\bar{x} \notin f(\bar{x}) = B$.

Sennonché ... nessuna delle due può essere vera!

E' infatti impossibile che $\bar{x} \in f(\bar{x}) = B$, perché B è, per definizione, l'insieme degli elementi di A che

NON appartengono all'insieme che loro corrisponde nella biiezione f ;

ma è pure impossibile che $\bar{x} \notin f(\bar{x}) = B$,

perché se così fosse $\bar{x}$ dovrebbe appartenere a B, per il modo in cui B è stato definito.

17) Quest'ultimo teorema ci assicura dunque che

I "GRADI DI INFINITO" SONO, A LORO VOLTA, INFINITI!

... Insomma, dato un numero cardinale,

se ne può SEMPRE trovare un altro ancora maggiore.



18)

Tra i numeri cardinali maggiori di c, ricordiamo solo la "potenza del funzionale", cioè il numero cardinale dell'insieme i cui elementi sono tutte le *funzioni* di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.