

3. CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Ora andremo a **RIDEFINIRE**, da un punto di vista ben più generale rispetto al paragrafo 1, le “funzioni angolari” **SENO**, **COSENO** e **TANGENTE**.

Le definizioni che daremo si riferiranno ad angoli qualsiasi, anche maggiori o uguali a 90° , anche maggiori di 360° , anche nulli o negativi, e tuttavia saranno perfettamente **EQUIVALENTI**, per gli angoli acuti, a quelle con cui abbiamo in precedenza avviato il discorso.

L’equivalenza fra definizioni “vecchie” e definizioni “nuove” verrà rigorosamente dimostrata in un paragrafo dedicato ai “teoremi sui triangoli rettangoli”.

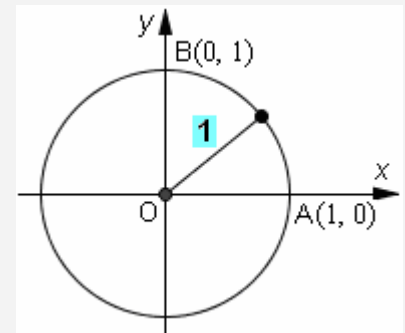
Lo studio delle funzioni angolari (ossia di quelle quantità, come il seno, il coseno e la tangente, il cui valore dipende dall’ampiezza di un angolo - o, in modo equivalente, dalla misura di un arco) viene chiamato “**GONIOMETRIA**” (in greco, **gonos** = **angolo** e **metron** = **misura**) oppure “**TRIGONOMETRIA**”, termine che è praticamente un sinonimo di “goniometria” ma mette maggiormente in rilievo il fatto che, molto sovente, interessa applicare le formule studiate ai tre angoli interni di un *triangolo*.

Lo strumento concettuale che è posto alla base della goniometria è la “**circonferenza goniometrica**”.

Cos’è, dunque, la “**CIRCONFERENZA GONIOMETRICA**”?

E’ una circonferenza

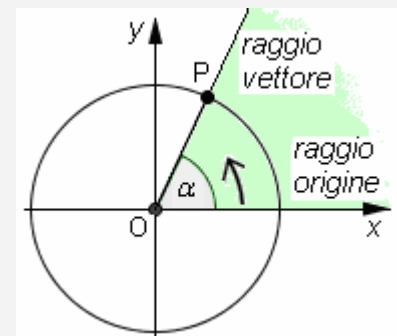
- **avente il centro nell’origine di un sistema di assi cartesiani**
- **e (importantissimo!) RAGGIO UGUALE A 1**
(cioè, raggio uguale all’unità di misura del sistema di riferimento).



S’intende che sulla circonferenza goniometrica gli **ANGOLI** vadano sempre riportati

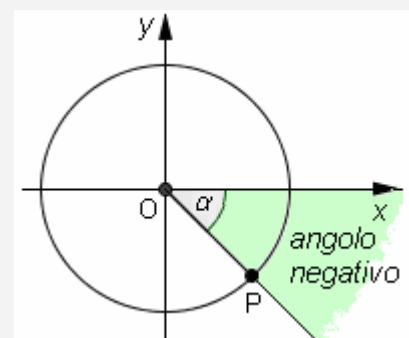
- **con vertice nel centro (= nell’origine)**
- **a partire dal semiasse delle ascisse positive**
(che sarà dunque sempre il “primo lato” dell’angolo)
- **e in SENSO ANTIORARIO** ↺.

Il “primo lato” dell’angolo, ossia il semiasse delle ascisse positive, viene anche detto “**raggio origine**” dell’angolo, mentre il secondo lato (semiretta OP nella figura) è detto “**raggio vettore**”.



Agli angoli riportati in senso **ORARIO** si assegna **MISURA NEGATIVA**:

ad esempio,
l’angolo qui a fianco raffigurato misurerà -45°
(oppure, in radianti, $-\frac{\pi}{4}$).

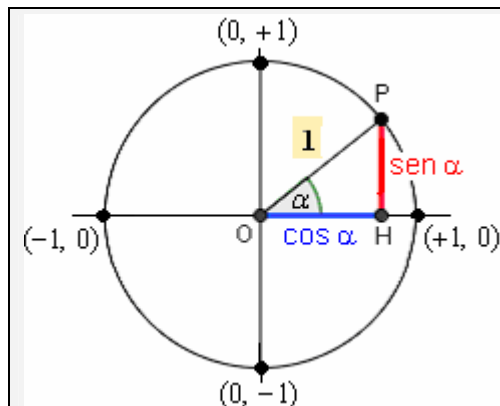


4. SENO E COSENO DI UN ANGOLO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Nella circonferenza goniometrica, consideriamo un certo angolo α (che di norma sarà compreso fra 0° e 360° , ma potrebbe pure essere negativo, o maggiore di 360°): cosa intendiamo per “seno di α ($\sin \alpha$)” e per “coseno di α ($\cos \alpha$)”?

Andiamo a considerare il punto P in cui il raggio vettore di α interseca la circonferenza goniometrica:

- ♪ il **SENO** di α è, per definizione, l’**ORDINATA** di P,
- ♪ mentre il **COSENO** di α è, per definizione, l’**ASCISSA** di P.



sen α = ordinata di P = misura (con segno) di HP

cos α = ascissa di P = misura (con segno) di OH

La circonferenza goniometrica ha, come abbiamo detto, centro nell'origine e raggio 1; quindi i suoi punti hanno

- ascissa che può andare da un minimo di -1 a un max di $+1$;
- ordinata che può andare, anch'essa, da un minimo di -1 a un massimo di $+1$.

Pertanto **il seno e il coseno di un angolo α sono sempre compresi fra -1 e $+1$:**

$$\forall \alpha, \quad -1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

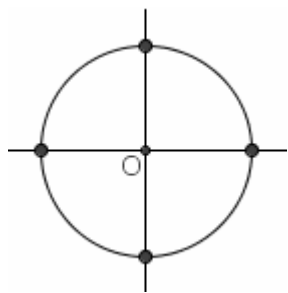
Si ha subito (Pitagora) la **1ª RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA**: qualunque sia l'angolo α (anche, eventualmente, con $\alpha > 360^\circ$, o $\alpha < 0^\circ$), è sempre

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad \text{NOTA: } \text{sen}^2 \alpha, \text{cos}^2 \alpha \text{ sono scritte abbreviate di: } (\text{sen } \alpha)^2, (\text{cos } \alpha)^2$$



Per $\alpha = 0^\circ$ (0 radianti) $\text{sen } \alpha = 0$; $\text{cos } \alpha = 1$	Nel 1° quadrante, ossia per $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), è $\text{sen } \alpha > 0$, $\text{cos } \alpha > 0$... e quando α cresce da 0° a 90°, $\text{sen } \alpha$ cresce (da 0 a 1) $\text{cos } \alpha$ decresce (da 1 a 0)
Per $\alpha = 90^\circ$ ($\frac{\pi}{2}$ radianti) $\text{sen } \alpha = 1$; $\text{cos } \alpha = 0$	Nel 2° quadrante, ossia per $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), è $\text{sen } \alpha > 0$, $\text{cos } \alpha < 0$... e quando α cresce da 90° a 180°, $\text{sen } \alpha$ decresce (da 1 a 0) $\text{cos } \alpha$ decresce (da 0 a -1)
Per $\alpha = 180^\circ$ (π radianti) $\text{sen } \alpha = 0$; $\text{cos } \alpha = -1$	Nel 3° quadrante, ossia per $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ($\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$), è $\text{sen } \alpha < 0$, $\text{cos } \alpha < 0$... e quando α cresce da 180° a 270°, $\text{sen } \alpha$ decresce (da 0 a -1) $\text{cos } \alpha$ cresce (da -1 a 0)
Per $\alpha = 270^\circ$ ($\frac{3}{2}\pi$ radianti) $\text{sen } \alpha = -1$; $\text{cos } \alpha = 0$	Nel 4° quadrante, ossia per $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ($\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$), è $\text{sen } \alpha < 0$, $\text{cos } \alpha > 0$... e quando α cresce da 270° a 360°, $\text{sen } \alpha$ cresce (da -1 a 0) $\text{cos } \alpha$ cresce (da 0 a 1) Quando α raggiunge e poi supera i 360°, i valori di $\text{sen } \alpha$ e di $\text{cos } \alpha$ “ripartono come se si ripartisse da 0°”; cioè, le funzioni “seno” e “coseno” sono “periodiche di periodo 360°”. Ne ripareremo.

Clicca QUI [↗](#) per una bella figura “dinamica” (GeoGebra) sulla variazione di seno e coseno al variare dell'arco

ESERCIZI

1) Nella circonferenza goniometrica in figura

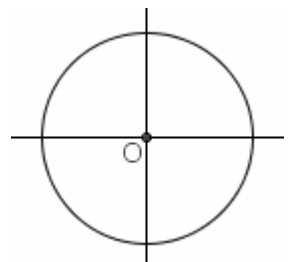
- I) scrivi la coppia delle coordinate di ciascuno dei cinque punti evidenziati
 II) disegna: a) l'angolo di 135° ; b) quello che misura $\frac{7}{6}\pi$; c) quello di -80°
 III) e disegna inoltre una coppia di angoli fra loro complementari: α e $90^\circ - \alpha$ (potrebbero essere, ad esempio, 25° e $65^\circ \dots$)
 per constatare un fatto importante, che vale poi per qualsiasi valore di α , anche maggiore di 90° o di 180° o di 360° , anche negativo: si ha sempre

$$\boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha}$$

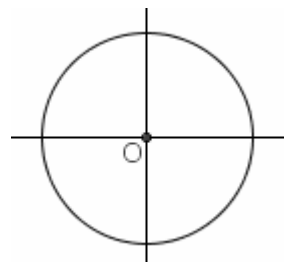
PASSANDO DA UN ANGOLO AL SUO COMPLEMENTARE, I VALORI DI SENO E COSENO SI SCAMBIANO FRA LORO.



- 2) Sapendo che $\sin 43^\circ \approx 0.68$, $\cos 43^\circ \approx 0.73$, riempi i puntini: $\sin 47^\circ \approx \dots$, $\cos 47^\circ \approx \dots$
 3) a) Noto il valore $\sin \alpha$ del seno di un angolo, ci sono due modi per ricavare $\cos \alpha$. Quali?
 b) Determina: il coseno di un angolo ottuso il cui seno vale 0.39
 c) Determina il seno di un angolo acuto il cui coseno vale 0.14
 4) Quali sono gli angoli, compresi fra 0° e 360° ,
 a) il cui seno è uguale a 0? b) il cui coseno è uguale a 0? c) il cui seno è uguale a 1?
 d) il cui coseno è uguale a 1? e) il cui seno è uguale a -1? f) il cui coseno è uguale a -1?
 g) il cui seno è uguale al coseno? h) il cui seno è l'opposto del coseno?
 i) Se un angolo α compreso fra 0° e 360° ha coseno < 0 , in quale intervallo di ampiezze può trovarsi?



- 5) $\sin 122^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 122^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 180^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 180^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 214^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 214^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 270^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 270^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\sin 355^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$
 $\cos 355^\circ$ è: a) > 0 b) < 0 c) $= 0$ d) $= +1$ e) $= -1$



6) Utilizzando una matita e una circonf. goniometrica, individua la risposta corretta:

- $\sin(\alpha + 180^\circ) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(180^\circ - \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(90^\circ - \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(90^\circ + \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\sin(-\alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$
 $\cos(180^\circ - \alpha) = ?$ a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $-\sin \alpha$ d) $-\cos \alpha$

RISPOSTE

- 1) III) In effetti, nella figura qui a destra, si ha: $\widehat{POH} = \alpha$, $\widehat{P'OH'} = 90^\circ - \alpha$,
 $PH = \sin \alpha$, $OH = \cos \alpha$, $P'H' = \sin(90^\circ - \alpha)$, $OH' = \cos(90^\circ - \alpha)$
 e si può osservare (e dimostrare) che è $P'H' = OH$, $OH' = PH$

- 2) $\sin 47^\circ = \cos(90^\circ - 47^\circ) = \cos 43^\circ \approx 0.73$
 $\cos 47^\circ = \sin(90^\circ - 47^\circ) = \sin 43^\circ \approx 0.68$

- 3) a) Primo modo: $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ dove il segno dev'essere deciso in base all'ampiezza dell'angolo

Secondo modo: con la macchinetta, risalire dal seno all'angolo (tasto $\sin^{-1}$), poi calcolare il coseno ($\cos$)

- b) ≈ -0.92 c) ≈ 0.99

- 4) a) $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ b) $90^\circ, 270^\circ$ c) 90° d) $0^\circ, 360^\circ$ e) 270°
 f) 180° g) $45^\circ, 225^\circ$ h) $135^\circ, 315^\circ$ i) $90^\circ < \alpha < 270^\circ$

- 5) $\sin 122^\circ > 0$, $\cos 122^\circ < 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 214^\circ < 0$,
 $\cos 214^\circ < 0$, $\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$, $\sin 355^\circ < 0$, $\cos 355^\circ > 0$

- 6) $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$,
 $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

