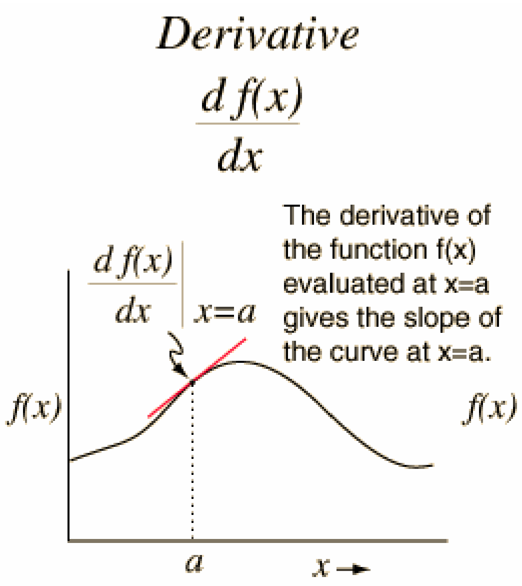
LE DERIVATE



(figura tratta dal sito http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu)

DERIVATE

1) DEFINIZIONE E SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

Consideriamo la funzione

$\boxed{y = x^3 - x^2}$.

Desideriamo tracciarne il cosiddetto "grafico probabile"
ossia quell'abbozzo di grafico che si è in grado di disegnare dopo che si sono determinati:

1) il dominio;
2) le intersezioni con gli assi;
3) la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);
4) i limiti ai confini del dominio.

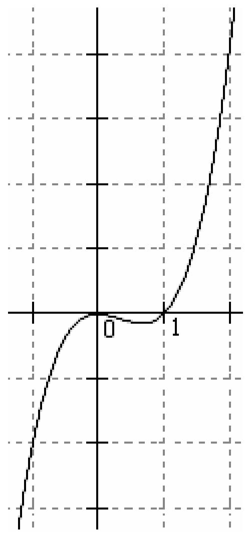
Pronti … via!

$\boxed{y = x^3 - x^2}$

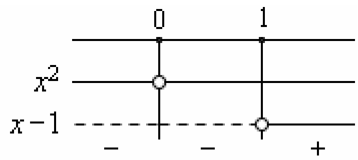
1) Il dominio è tutto $\mathbb{R}$

2) $x = 0 \;\to\; y = 0$ quindi l'intersezione con l'asse y è il punto (0, 0)

$y = 0 \leftrightarrow x^3 - x^2 = 0; \quad x^2(x-1) = 0; \quad x = 0 \vee x = 1$
quindi le intersezioni con l'asse x sono i punti (0, 0) e (1,0)



3) $y > 0 \leftrightarrow x^3 - x^2 > 0; \quad x^2(x-1) > 0; \quad x > 1$ (schema sottostante)



Linea continua = espressione positiva
Linea tratteggiata = espressione negativa
Pallino = espressione nulla

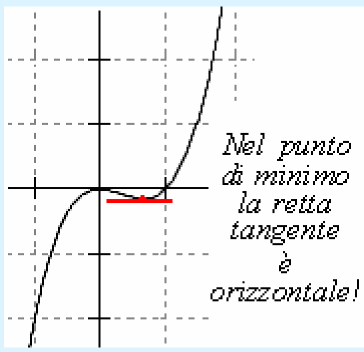
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 - x^2\right) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - x^2\right) = +\infty$

… *e dalle informazioni* 1), 2), 3) *e* 4) *si trae la figura qui a destra* →

Dal "grafico probabile" si desume con certezza che deve esserci un punto di minimo relativo, con ascissa compresa fra 0 e 1.

Sarebbe molto interessante riuscire a determinare in modo *PRECISO* le coordinate di questo punto.

Osserviamo che, nel punto di minimo, la retta tangente al grafico è orizzontale, quindi ha coefficiente angolare uguale a 0;



perciò

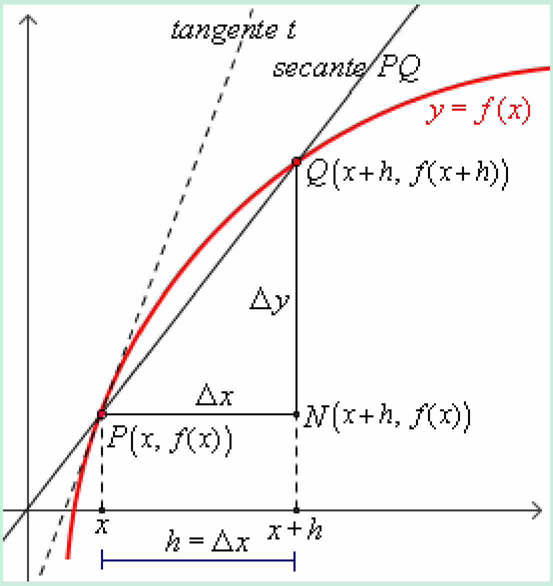
se noi riuscissimo a trovare una formula che, per ciascun valore di *x*, fornisca il coefficiente angolare della retta tangente alla nostra funzione nel punto di ascissa *x*, saremmo a posto, perché, **per trovare la *x* del punto di minimo, basterebbe poi risolvere l'equazione ottenibile uguagliando a 0 l'espressione trovata.**

Affrontiamo questo problema dapprima dal punto di vista generale.

Consideriamo (vedi figura qui a fianco) una funzione $y = f(x)$; sia x un'ascissa fissata; indichiamo con P il punto del grafico, avente ascissa x. Le coordinate di P saranno dunque $(x,\ f(x))$.

La retta tangente in P è definita come la posizione limite di una retta secante PQ (con Q punto sulla curva, distinto da P) quando il punto Q viene portato *vicinissimo* a P.

Indichiamo l'ascissa di Q con $x+h$ (essendo h un incremento che potrà essere *positivo* o anche *negativo*: si parla di "incremento *algebrico*").



Le coordinate di Q saranno allora $(x+h,\ f(x+h))$ e avremo:

- **coefficiente angolare della secante PQ** =
$$= \frac{\textbf{\textit{differenza ordinate di Q e P}}}{\textbf{\textit{differenza ascisse di Q e P}}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{NQ}{PN} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
- **coefficiente angolare della tangente t** =
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

❑ **Il rapporto** $\boxed{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

si dice "rapporto incrementale" della funzione f, relativo al punto x e all'incremento h.
Esso è uguale al **coefficiente angolare della retta secante** che passa per i punti $(x, f(x))$ e $(x+h,\ f(x+h))$.

❑ **Il limite del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento *h*:**

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \quad \textbf{(ammesso che esista e sia finito)}$$

si dice "derivata" della funzione f nel punto x, è indicato con il simbolo $\boxed{f\,'(x)}$,

ed è uguale al coeff. ang. della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x, f(x))$.

OSSERVAZIONI:

a) *se il limite non esiste*, si dice che "la f non è derivabile nel punto x"

b) *se il limite esiste, ma è infinito*, si dice ancora che "la f non è derivabile in x", ma contemporaneamente, se la funzione f è continua nell'ascissa x, si dice anche che "la f ha in x derivata infinita". La contraddizione sotto l'aspetto linguistico è evidente, ma è entrata nell'uso (anche perché, effettivamente, accettarla comporta alcuni vantaggi).

Evidentemente,

♪ il caso a) si verifica se e solo se il grafico della f *non ammette retta tangente* in P(x, $f(x)$)

♫ mentre il caso b) si verifica se e solo se *la posizione limite della retta secante PQ è verticale*; qui, tuttavia, la posizione limite della retta secante viene chiamata "retta tangente" *soltanto* qualora la funzione f sia *continua* nell'ascissa x.

- ESEMPIO: **calcolare la derivata della funzione** $y = f(x) = (x-3)^2$ **nel punto** $x = 5$.

Rapporto incrementale $= \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} =$

$$= \frac{(5+h-3)^2-(5-3)^2}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{\cancel{4}+4h+h^2\cancel{-4}}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = h+4$$

Derivata $= f'(5) = \lim\limits_{h\to 0}(h+4) = 4$

Il coeff. ang. della retta tangente alla curva di equazione $y=(x-3)^2$ nel punto $x=5$ vale dunque 4 !

- **Esempio più generale:**
  calcolare la derivata della funzione $y = f(x) = (x-3)^2$ **nel generico punto di ascissa** x.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-3)^2-(x-3)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^2\cancel{+9}+2hx\cancel{-6x}-6h\cancel{-x^2}\cancel{+6x}\cancel{-9}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx-6h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x-6)}{\cancel{h}} = 2x-6 \qquad (NOTA)$$

NOTA: in esercizi di questo tipo, è IMPORTANTISSIMO tener presente
che la quantità tendente a 0 è l'incremento *h*, mentre l'ascissa *x* è FISSA.
Nel calcolo del limite, *x* va trattata come una costante, *h* come la variabile (tendente a 0).

In definitiva: $f'(x) = 2x-6$.
Il coeff. ang. della retta tangente alla curva $y=(x-3)^2$ nel punto di ascissa x vale dunque $2x-6$!
Perciò, ad esempio, si avrà: $f'(3)=0$; $f'(4)=2$; $f'(5)=4$ (come già sapevamo), ecc. ecc.

Torniamo ora al problema da cui avevamo preso le mosse.
Si trattava di trovare l'ascissa nella quale la funzione $y = f(x) = x^3 - x^2$ **tocca il suo minimo relativo.**

Avevamo osservato che in corrispondenza del punto in questione doveva annullarsi
il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione.

Calcoliamo l'espressione di tale coefficiente angolare in corrispondenza della generica ascissa *x*, ossia **calcoliamo la derivata** $f'(x)$:

$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3-(x+h)^2\right]-\left[x^3-x^2\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3hx^2+3h^2x+h^3\cancel{-x^2}-2hx-h^2\cancel{-x^3}\cancel{+x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3-2hx-h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3hx+h^2-2x-h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3hx+h^2-2x-h\right) = \boxed{3x^2-2x}$$

Ora cerchiamo il valore di *x* per cui $f'(x)=0$ **:**

$f'(x)=0$

$\boxed{3x^2-2x=0}$; $\quad x(3x-2)=0$; $\quad \boxed{x=0 \lor x=\frac{2}{3}}$

Delle due ascisse trovate, quella di minimo relativo è quella compresa fra 0 e 1, ossia $x = 2/3$.
Perciò

$$\boxed{x_m = \frac{2}{3}}, \quad \textit{da cui} \quad y_m = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27}$$

L'altra soluzione x=0, evidentemente, è l'ascissa dell'altro punto
in corrispondenza del quale la retta tangente è orizzontale (l'origine).

- ALTRO ESEMPIO. **Calcolare la derivata, nel generico punto x, della funzione $y = f(x) = sen\,x$**

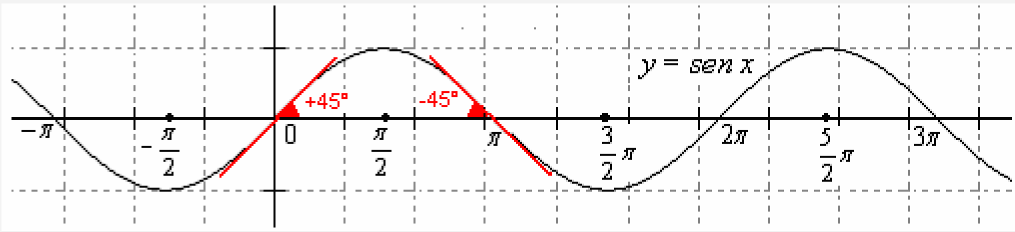
$$\boxed{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen\,x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen\,x\,cos\,h + cos\,x\,sen\,h - sen\,x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sen\,x(cos\,h-1)+cos\,x\,sen\,h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(sen\,x\frac{cos\,h-1}{h}+cos\,x\frac{sen\,h}{h}\right) = sen\,x\cdot 0 + cos\,x\cdot 1 = \boxed{cos\,x}$$

Abbiamo dunque dimostrato che **la derivata della funzione $sen\,x$ è uguale a $cos\,x$**

1) Osserviamo che tale derivata $cos\,x$ si annulla quando $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi....$,

   insomma: quando $x=\frac{\pi}{2}+k\pi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $con\ k\in\mathbb{Z}$ (multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$).
   Ma ciò va perfettamente d'accordo col fatto che pensando al grafico della funzione $y = sen\,x$,
   i punti in cui la tangente alla curva è orizzontale sono quelli in cui la funzione
   tocca il suo massimo oppure il suo minimo, ovvero proprio i multipli dispari di $\pi/2$.



2) Osserviamo inoltre che $f'(0)=[cos\,x]_{x=0}=1$, il che significa che
   la sinusoide $y = sen\,x$ attraversa l'origine con inclinazione di coeff. ang. 1 quindi di +45°.

3) Analogamente si ha: $f'(\pi)=-1$, $f'(2\pi)=1$, $f'(3\pi)=-1$, ecc. ecc.
   con ovvia interpretazione in termini di inclinazione del grafico della $y = sen\,x$.

ESERCIZI (alcune risposte alla fine)

1) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = x^5$, nel punto $x=1$, è uguale a 5
   mentre nel punto $x=2$ è uguale a 80 e nel punto $x=3$ è uguale a 405.
   A cosa si devono valori così alti?

2) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = x^5$, nel punto di ascissa x, è $f'(x)=5x^4$.
   Tale derivata si annulla quando $x=0$: cosa possiamo dedurne, riguardo al grafico della $f(x)$?

3) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$, nel punto di ascissa 2, vale $-\frac{1}{4}$.

4) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = \frac{1}{x}$, nel punto di ascissa x, è $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

   Tale derivata non si annulla per nessun valore di x, anzi: è *negativa* per ogni valore di x.
   E infatti il grafico della $f(x)$ ha la caratteristica di essere …

5) Dimostra che la derivata della funzione $y = f(x) = 2x^3-9x^2+12x$ è $f'(x)=6x^2-18x+12$.
   Successivamente, analizza la funzione $f(x)$, determinando:
   - il dominio;
   - le intersezioni con gli assi;
   - la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva
   - i limiti ai confini del dominio
   - i valori di x per i quali la retta tangente al grafico è orizzontale.

   Traccia un abbozzo di grafico per la $f(x)$ e verificalo con un software matematico.

RISPOSTE 1) Valori molto alti perché la derivata esprime il coefficiente angolare della retta tangente quindi esprime l'inclinazione del grafico, e questo grafico si "impenna" molto rapidamente, al crescere di x
2) Ne deduciamo che il grafico ha per $x=0$ retta tangente orizzontale. In questo caso, tale tang. orizzontale viene *attraversata* dal grafico 4) … sempre decrescente (retta tangente con coeff. angolare <0 vuol dire retta tangente in discesa, quindi funzione in discesa) 5) Si ha una tangente orizzontale con $x=1$ e $x=2$

2) DERIVABILITA' E CONTINUITA'

TEOREMA: se una funzione è derivabile in un punto, allora è continua in quel punto.

Schematicamente: f *derivabile in* $x_0 \to f$ *continua in* x_0

(ho preferito usare qui il simbolo x_0 al posto di x per render meglio l'idea di un'ascissa FISSATA. In questo paragrafo il simbolo x ritorna invece ad indicare un'ascissa VARIABILE).

Ipotesi: esiste ed è *finito* il $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

Tesi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ o, in alternativa, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

Dimostrazione

L'ipotesi è che

esista finito il $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

Poniamo dunque $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=\varepsilon(h)$

e avremo che $\varepsilon(h)\to 0$ quando $h\to 0$.

Adesso possiamo scrivere:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=\varepsilon(h)$$
$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)=h\cdot\varepsilon(h)$$
$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$$
$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\varepsilon(h)\right]$$

Dall'ultima uguaglianza,
passando al limite per $h\to 0$, otteniamo:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left\{f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\varepsilon(h)\right]\right\}=f(x_0)$$

C.V.D.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:
il teorema non è invertibile, cioè non è vero che la continuità in un punto implichi per forza la derivabilità in quel punto.

Due controesempi:

♪ $y=\sqrt[3]{x}$

è continua nell'origine ma non è ivi derivabile, perché "ha derivata infinita"

♫ $y=|x-3|$

non è derivabile nel punto $x=3$ perché il rapporto incrementale in $x=3$ tende a due limiti distinti a seconda che l'incremento tenda a 0^+ o a 0^-.

Insomma:
la continuità in un punto è condizione NECESSARIA, ma NON SUFFICIENTE, per la derivabilità in quel punto.

3) INFINITESIMI, INFINITI; "SCRITTURA FUORI DAL SEGNO DI LIMITE"

- Della quantità $\varepsilon(h)$, introdotta nel Teorema precedente, si può dire che è "un infinitesimo".
  In Analisi matematica il termine "**infinitesimo**" viene spesso utilizzato per indicare "**una funzione o quantità che tende a zero, nel contesto di cui ci si sta occupando**". Altri esempi:
  - ♪ la funzione $y=\dfrac{1}{x^2}$ è un infinitesimo per $x\to\infty$
  - ♪ $y=sen\,x$ e $y=1-cos\,x$ sono infinitesimi per $x\to 0$
  - ♪ $e^{1/x}$ è un infinitesimo per $x\to 0^-$
- Analogamente, viene usata la parola "**infinito**" per indicare **una funzione o quantità che tende all'infinito, nel contesto di cui ci si sta occupando**; es.
  - ♫ $y=tg\,x$ è un infinito per $x\to\pi/2$
  - ♫ $ln\,x$ è un infinito per $x\to+\infty$
  - ♫ $\dfrac{1}{x-2}$ è un infinito per $x\to 2$
  - ♫ $e^{1/x}$ è un infinito per $x\to 0^+$
- Per "**scrittura fuori dal segno di limite**" si intende **la possibilità, nel caso si abbia $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, di esprimere la funzione come somma del limite più un infinitesimo**:

  $\boxed{f(x)=\ell+\varepsilon(x)}$ **essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo quando $x\to\ell$.**

  In effetti, posto $\varepsilon(x)=f(x)-\ell$, si ha banalmente $f(x)=\ell+(f(x)-\ell)=\ell+\varepsilon(x)$ e $\varepsilon(x)\to 0$
  (in pratica, la quantità $\varepsilon(x)$ che compare nella scrittura non è altro che la differenza $f(x)-\ell$).

4) IMPORTANTI CONSIDERAZIONI SULLA SIMBOLOGIA

Il simbolo $\boxed{f\,'(x)}$:

- **Se si pensa** *x* **FISSATO**, indica il **valore della derivata** in *quella particolare ascissa x*;
- **Se si pensa** *x* **VARIABILE**, indica una quantità il cui valore *dipende da x*:
  è la cosiddetta "**funzione derivata**" della *f*, che esprime, per ogni valore di *x*,
  il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della f nel punto di coordinate $(x,\ f(x))$.

  Esempio:

  $$f(x)=(x-3)^2 \rightarrow \boxed{f\,'(x)=2x-6} \left\langle \begin{array}{l} \textit{valore della derivata nel punto } x \textit{ (se si pensa } x \textit{ fissato)} \\ \textit{funzione derivata della } f(x) \textit{ (se si pensa } x \textit{ variabile)} \end{array} \right.$$

Altri simboli che possono essere adoperati al posto di $f\,'(x)$ sono i seguenti:

$$\boxed{\begin{array}{l} y' \ \ o \ \ y'(x) \\ Df(x) \ \ o \ \ Df \ \ o \ \ Dy \\ \dfrac{dy}{dx} \end{array}}$$

Quest'ultima scrittura $\boxed{\dfrac{dy}{dx}}$ **(NOTAZIONE DI LEIBNIZ) è particolarmente suggestiva**,
perché richiama la genesi della derivata a partire dal rapporto incrementale:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{rapporto} \\ \textit{incrementale}\end{array} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

(in matematica, il simbolo Δ viene sovente usato per indicare
"differenza finita", "incremento (algebrico) finito")

$$\boxed{\textit{derivata} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}}$$

(il simbolo *d* sostituisce il simbolo Δ
quando si pensa a differenze o ad incrementi
"molto piccoli", tendenti a zero", "infinitesimi", "evanescenti")

Ad esempio, posto

$$y = f(x) = sen\,x\,,$$

potremo utilizzare, per indicarne la derivata (che, come sappiamo, è la funzione $cos\,x$) ,
una qualsiasi delle scritture seguenti:

$$f\,'(x) = cos\,x \qquad f\,' = cos\,x$$

$$y'(x) = cos\,x \qquad y' = cos\,x$$

$$Dy = cos\,x, \qquad Df = cos\,x, \qquad Df(x) = cos\,x, \qquad D(sen\,x) = cos\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = cos\,x, \qquad \frac{df}{dx} = cos\,x, \qquad \frac{d}{dx}(sen\,x) = cos\,x$$

Esistono anche **diversi possibili modi per indicare il valore della derivata in un punto specifico.**
Illustriamo i principali attraverso un esempio.

La derivata della funzione $y = g(x) = x^3 - x^2$ è $y' = 3x^2 - 2x$ (come abbiamo già visto).
Se ora vogliamo indicare , mettiamo il caso,
che tale derivata nel punto $x = -1$ assume il valore 5,
potremo scrivere:

$$\boxed{y'(-1)=5; \qquad g\,'(-1)=5; \qquad \left[Dg(x)\right]_{x=-1}=5; \qquad \left[\frac{dg}{dx}\right]_{x=-1}=5}$$

5) DERIVATA UNILATERALE

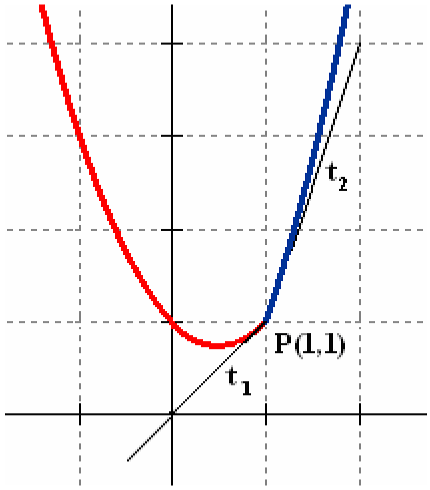
Consideriamo la funzione

$\boxed{y = f(x) = x^2 + |x-1|}$.

Avremo

$$\begin{cases} con \ \boxed{x \le 1}, & \boxed{f(x) =}\ x^2 + (-x+1) = \boxed{x^2 - x + 1} \\ con \ \boxed{x \ge 1}, & \boxed{f(x) =}\ x^2 + (x-1) = \boxed{x^2 + x - 1} \end{cases}$$

Il grafico della funzione è costituito da "**due archi di parabola che si tengono per mano**".



Nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa $x = 1$, cambia l'espressione analitica della funzione: tale espressione è $x^2 - x + 1$ con $x \le 1$, diventa invece $x^2 + x - 1$ con $x \ge 1$.
Il brusco cambiamento di espressione determina un altrettanto brusco cambiamento nell'inclinazione della curva. Si dice che il punto P, di ascissa 1, è un "**punto angoloso**".

La curva, per via dell' "angolosità", NON ammette retta tangente nel punto P(1,1) in cui si passa da un'espressione all'altra.

Potremmo però dire che,

- se consideriamo soltanto la parte del grafico che si trova "da P verso sinistra", avremo una retta tangente in P con una certa inclinazione;
- se invece consideriamo soltanto la parte di grafico che va "da P verso destra", avremo UN'ALTRA retta tangente con un'altra inclinazione.

Per questo motivo, nella figura abbiamo preferito disegnare solo due SEMIrette,
la semiretta t_1 "tangente in P verso sinistra" e la semiretta t_2 "tangente in P verso destra".

Quali saranno i coefficienti angolari di queste due semirette?

Per rispondere, osserviamo che

- t_1 può essere pensata come la posizione che una semiretta secante, con origine in P e passante per un altro punto Q del grafico, situato A SINISTRA di P, tende ad assumere quando Q viene fatto tendere a P;
- e analogamente, t_2 può essere pensata come la posizione limite di una semiretta secante PQ, con Q situato sul grafico, A DESTRA di P, e fatto tendere a P.

E' allora evidente che il coefficiente angolare di t_1 ("semitangente in P verso sinistra") potrà essere determinato calcolando il

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

mentre il coefficiente angolare di t_2 ("semitangente in P verso destra") coinciderà col

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Si parla, in casi come questo, di

- **"rapporto incrementale sinistro" e "derivata sinistra",**
- **"rapporto incrementale destro" e "derivata destra".**

In generale:

Sia data una funzione $y = f(x)$, e un punto x_0 nel quale la funzione sia definita.

- Si dice "**rapporto incrementale sinistro**" della $f(x)$ in x_0, l'espressione
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{con } h<0$$
- Si dice "**rapporto incrementale destro**" della $f(x)$ in x_0, l'espressione
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{con } h>0$$
- Se esiste finito il $\lim\limits_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,
esso viene detto "**derivata sinistra**" della $f(x)$ in x_0, e indicato con $f'_-(x_0)$
- Se esiste finito il $\lim\limits_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,
esso viene detto "**derivata destra**" della $f(x)$ in x_0, e indicato con $f'_+(x_0)$

E' conseguenza immediata della definizione di "derivata" il teorema seguente:

$f(x)$ è derivabile in x_0 se e solo se ammette, in x_0, tanto la derivata sinistra quanto la derivata destra, e queste sono uguali fra loro:

$$\boxed{\exists\, f'(x_0)} \leftrightarrow \boxed{\exists\, f'_-(x_0)} \wedge \boxed{\exists\, f'_+(x_0)} \wedge \boxed{f'_-(x_0)=f'_+(x_0)}$$

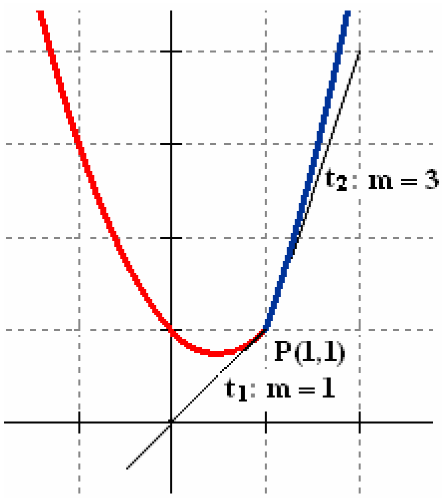
Ritornando ora all'esempio da cui eravamo partiti:

$$f(x)=x^2+|x-1|=\left\langle \begin{array}{ll} x^2-x+1 & con\ x\le 1 \\ x^2+x-1 & con\ x\ge 1 \end{array}\right.$$

avremo:

$$\boxed{f'_-(1)}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{\text{NOTA 1}}{=}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\left((1+h)^2-(1+h)+1\right)-1}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0-}(h+1)=\boxed{1}$$

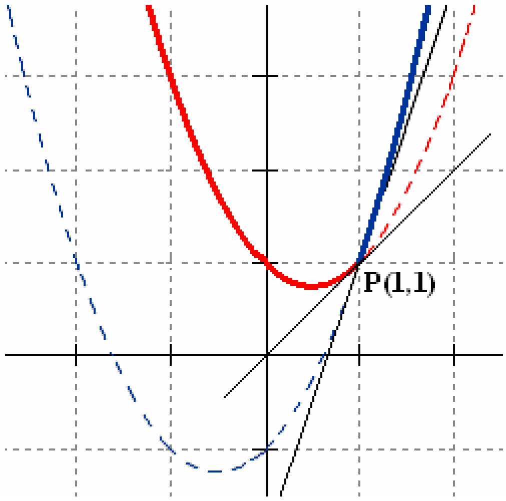
$$\boxed{f'_+(1)}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\overset{\text{NOTA 2}}{=}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\left((1+h)^2+(1+h)-1\right)-1}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0+}(h+3)=\boxed{3}$$



NOTA 1 – Qui per il calcolo di $f(1+h)$ utilizziamo l'espressione x^2-x+1, che vale a *sinistra* dell'ascissa 1, perché, essendo h negativo, $1+h$ si trova appunto a *sinistra* di 1

NOTA 2 – Qui per il calcolo di $f(1+h)$ utilizziamo l'espressione x^2+x-1, che vale a *destra* dell'ascissa 1, perché, essendo h positivo, $1+h$ si trova appunto a *destra* di 1

OSSERVAZIONE ANTICIPATRICE.
A dire il vero, quando determineremo e impareremo a memoria le regole per le derivate delle funzioni elementari, di fronte ad un problema di questo tipo, preferiremo comportarci in un modo diverso.
Ragioneremo così:
la derivata sinistra coincide col coeff. ang. che avrebbe, nell'ascissa 1, la retta tangente al grafico della funzione, se la funzione stessa mantenesse, anche a destra dell'ascissa 1, la medesima espressione analitica che è valida con $x \le 1$, ossia $x^2 - x + 1$
… e discorso analogo per la derivata destra (vedi figura).
Quindi, in modo molto più rapido ed efficiente:



$$f'_-(1) = \left[D(x^2 - x + 1)\right]_{x=1} \overset{\text{NOTA}}{=} \left[2x - 1\right]_{x=1} = 2 - 1 = 1$$

$$f'_+(1) = \left[D(x^2 + x - 1)\right]_{x=1} \overset{\text{NOTA}}{=} \left[2x + 1\right]_{x=1} = 2 + 1 = 3$$

NOTA : quando avremo imparato la regola per la derivata di un polinomio, ci metteremo un decimo di secondo a ricavare: $D(x^2 - x + 1) = 2x - 1$ e $D(x^2 + x - 1) = 2x + 1$

Altro esempio

La funzione $y = f(x) = e^{1/x}$ è definita per $x \ne 0$.

Essa presenta, curiosamente, due comportamenti del tutto diversi a sinistra e a destra dell'ascissa 0: infatti è

$$\lim_{x \to 0-} e^{1/x} = 0^+ \ (\textit{perché l'esponente tende a } -\infty); \quad \lim_{x \to 0+} e^{1/x} = +\infty \ (\textit{perché l'esponente tende a } +\infty)$$

Da sinistra, la funzione **"si tuffa"** dunque **nell'origine**;
ma – ci chiediamo – **secondo quale inclinazione avviene il "tuffo"?**

Per rispondere a questa domanda, potremmo procedere come segue:
"completiamo per continuità" la definizione della funzione, ottenendo

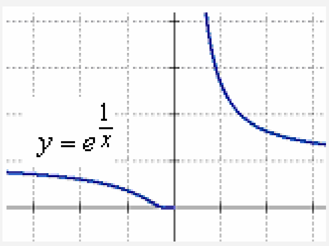
$$F(x) = \begin{cases} e^{1/x} & per\ x \ne 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

La funzione $F(x)$ è "figlia" della $f(x)$, ma rispetto alla funzione "madre" ha, in più, la proprietà di essere definita nell'ascissa 0 e ivi CONTINUA A SINISTRA.
E' evidente che l'inclinazione con cui la funzione madre f "si tuffa" nell'origine, provenendo dalla sinistra, è la stessa inclinazione con la quale fa lo stesso "tuffo" la funzione figlia F.
Calcoliamo quindi il rapporto incrementale SINISTRO della $F(x)$ nell'ascissa 0, e cerchiamone poi il limite quando l'incremento h tende a 0; insomma, andiamo a calcolare la DERIVATA SINISTRA DELLA $F(x)$.
Dunque:

$$F'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{e^{1/h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{e^{1/h}}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{1}{h} e^{1/h} = \lim_{z \to -\infty} z e^z \overset{\text{NOTA}}{=} 0^-$$

NOTA. Quest'ultimo limite (si ha una Forma di Indecisione "infinito moltiplicato zero") sarà dimostrato uguale a 0 nel capitolo sul Teorema di De L'Hospital, che vedremo successivamente. Tuttavia, dal punto di vista intuitivo, la grande rapidità con cui sappiamo tendere a zero l'esponenziale al tendere dell'esponente a $-\infty$, *ci fa "sentire" fin d'ora come ampiamente plausibile il risultato 0.*

Pertanto, **da tutto quanto visto si trae che la funzione** $y = f(x) = e^{1/x}$ **si "tuffa" nell'origine, DA SINISTRA, con inclinazione di coeff. ang. 0** (tutt'altro che un tuffo "di testa" quindi ! … **un tuffo "orizzontale"**, invece!), come un grafico tracciato con software matematico potrebbe confermare →.



OSSERVAZIONE
Si poteva giungere alla stessa conclusione anche calcolando il $\lim_{x \to 0-} f'(x)$;
ci ritorneremo quando, parlando di "Studio di funzione", tratteremo il "Criterio sufficiente di derivabilità".

6) DERIVATE DELLE FUNZIONI FONDAMENTALI

$\boxed{y = c \to y' = 0}$ **"La derivata di una costante è zero"**

Dimostrazione

$f(x) = c$ *(costante)* $\qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \overset{NOTA}{=} \lim_{h\to 0} 0 = 0$

NOTA La frazione 0/h ha senso (e vale 0) solo per $h \neq 0$*, ma un limite non dipende in alcun modo da ciò che succede alla funzione nell'ascissa alla quale si fa tendere la variabile.*

$\boxed{y = x \to y' = 1}$ **"La derivata della funzione identica** $y = x$ **è 1"**

Dimostrazione

$f(x) = x \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

$\boxed{y = x^n \to y' = nx^{n-1}, \quad con\ n = 2, 3, 4, \ldots}$

Formula per la derivata di una potenza con esponente 2,3,4…
(CHE SI ESTENDERA' POI A QUALSIASI ESPONENTE REALE)

Dimostrazione

$y = f(x) = x^n,$
$con\ n = 2, 3, 4\ldots$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \overset{\text{NOTA 1}}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}\right] \overset{\text{NOTA 2}}{=} nx^{n-1}$$

NOTA 1: Si può dimostrare che vale, sia per n pari che per n dispari, la formula
$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

NOTA 2: Infatti entro la quadra abbiamo n addendi (per contarli, pensa che gli esponenti di x vanno da 0 a $n-1$*, quindi i termini in totale sono n), e ciascun addendo tende a* x^{n-1}

Osserviamo che la validità della formula si può pensare estesa anche al caso n=1 (funzione identica *y=x*) che era stato trattato precedentemente in modo autonomo.
E la formula "funziona", volendo, anche nel caso n=0 (funzione costante).
Dimostreremo più avanti che la formula per la derivazione di una potenza rimane la stessa che abbiamo scritto sopra addirittura PER QUALSIASI ESPONENTE REALE (positivo, negativo o nullo), cioè che

$$\boxed{y = x^\alpha \to y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}}}.$$

Ti suggerisco di fissare in mente, e utilizzare fin d'ora se sarà il caso, questa importantissima regola.

Per la dimostrazione della formula avremmo potuto anche utilizzare, al posto della scomposizione in fattori, lo sviluppo del "binomio di Newton":

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n-\cancel{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]}{\cancel{h}} \overset{\text{NOTA 3}}{=} nx^{n-1}$$

NOTA 3: Infatti entro parentesi quadra tutti gli addendi, tranne il primo, contengono come fattore una potenza di h con esponente positivo e quindi tendono a zero al tendere a zero di h.

$$\boxed{y=\sqrt{x}\rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Dimostrazione:

$$y=f(x)=\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Osserviamo che la formula appena stabilita "va d'accordo" con quella per la derivazione di una potenza con esponente intero (e di cui avevamo anticipato la validità per qualsiasi esponente reale). Infatti, scrivendo $y=\sqrt{x}$ *come* $y=x^{1/2}$, *se si applica formalmente la regola per la derivazione di una potenza, stabilita nel caso che l'esponente fosse intero:* $Dx^n=nx^{n-1}$, *si ottiene*

$$y'=Dx^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ *ossia il risultato che abbiamo appena dedotto.*

$\boxed{y=sen\,x\rightarrow y'=cos\,x}$ *già dimostrata in precedenza*

$\boxed{y=cos\,x\rightarrow y'=-sen\,x}$ *la cui dimostrazione è lasciata al lettore*

$\boxed{y=\log_a x\rightarrow y'=\frac{1}{x}\log_a e}$ *da cui, in particolare, segue la formula di più frequente applicazione*:

$$\boxed{y=\ln x\rightarrow y'=\frac{1}{x}}$$

Dimostrazione

$f(x)=\log_a x$

$$rapp.\,incrementale=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=$$

$$=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}\cdot\frac{1}{x}}=\log_a\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}\right]^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}$$

e poiché, al tendere di h a 0, *e quindi per* $\frac{h}{x}=z$ *che tende a* 0, *si ha* $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}=(1+z)^{\frac{1}{z}}\rightarrow e$, *otteniamo*

$$derivata=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e,\quad C.V.D.$$

$\boxed{y=a^x\rightarrow y'=a^x\ln a}$ *da cui, in particolare, segue la formula di più frequente applicazione, ossia*

$$\boxed{y=e^x\rightarrow y'=e^x}$$

Dim.: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}$$

ed essendo noto che, al tendere di h a 0, $\frac{a^h-1}{h}\rightarrow\ln a$, *avremo* $\lim_{h\rightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\ln a$, *C.V.D.*

7) TEOREMI SULLE OPERAZIONI CON FUNZIONI DERIVABILI

1)
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in uno stesso punto x,
allora anche la loro somma $f(x)+g(x)$ è una funzione derivabile in quel punto,
e la derivata della funzione somma nel punto x è uguale alla somma delle derivate,
nello stesso punto, delle funzioni addizionate. Brevemente:

La derivata della somma di due funzioni derivabili esiste ed è uguale alla somma delle derivate”:

$$\boxed{y = f(x)+g(x) \to y' = f'(x)+g'(x)}$$

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$$(f+g)' = f'+g', \qquad D\left[f(x)+g(x)\right] = Df(x)+Dg(x)$$

Dimostrazione

$$D\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Esempio: $y = x^2 + sen\,x + e^x \to y' = 2x + cos\,x + e^x$

2)

La derivata del prodotto di una costante per una funzione derivabile
esiste ed è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione:

$$\boxed{y = cf(x) \to y' = cf'(x)}$$

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$(cf)' = cf'$ *(se c è una costante ed f una funzione)*; $\quad D\left[c\cdot f(x)\right] = c\cdot Df(x)$

La *dimostrazione*, facilissima, è *lasciata al lettore*.

Esempio: $y = 7x^3 \to y' = 7\cdot 3x^2 = 21x^2$

Conseguenza notevole dei teoremi 1) e 2):

La derivata di una combinazione lineare di funzioni
è uguale alla combinazione lineare (ovviamente, con gli stessi coefficienti) delle derivate:
ciò si può esprimere dicendo che
“LA DERIVATA E’ UN OPERATORE LINEARE”

In simboli, possiamo scrivere:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+...+c_n f_n(x)\right) = c_1 f'_1(x)+c_2 f'_2(x)+...+c_n f'_n(x)} \quad \text{o anche}$$

$$D\left(\sum_i c_i f_i(x)\right) = \sum_i c_i Df_i(x)$$

Esempi: $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \to y' = 3x^2 + 4x - 3$

$$y = 3ln\,x - 5\sqrt{x} \to y' = 3\cdot\frac{1}{x} - 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{6-5\sqrt{x}}{2x}$$

Conseguenze notevoli del teorema 1) e del fatto che la derivata di una costante è 0 sono le seguenti:

Una costante additiva, nella derivazione, viene eliminata

$$\boxed{y = f(x)+c \to y' = f'(x) \quad \text{es}: \quad y = sen\,x+5 \to y' = cos\,x}$$

Se due funzioni differiscono per una costante additiva, allora hanno la stessa derivata

$$\boxed{f(x) = g(x)+c \to f'(x) = g'(x)}$$

3)
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe derivabili in uno stesso punto x,
allora anche il loro prodotto $f(x)g(x)$ è una funzione derivabile in quel punto,
e la derivata di tale funzione prodotto nel punto x si ottiene applicando una regola particolare. Brevemente:

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili esiste e si ottiene con la seguente regola:

$$\boxed{y = f(x)\cdot g(x) \to y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

Scioglilingua:
"derivata della prima per (= moltiplicato) **la seconda, più la prima per la derivata della seconda"**

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$$(fg)' = f'g + fg'; \qquad D[f(x)\cdot g(x)] = Df(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot Dg(x)$$

Dimostrazione

$$D[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} \overset{\text{NOTA}}{=} g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \quad C.V.D.$$

NOTA
Quando facciamo tendere h a zero, siamo sicuri che $g(x+h) \to g(x)$
perché abbiamo supposto che la funzione g sia derivabile in x,
e un teorema noto ci assicura che
se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto.
Ricordiamo la definizione di continuità di una funzione in un punto:

$$f \text{ continua in } x_0 \overset{def.}{\longleftrightarrow} \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \exists \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Esempio: $y = x^2 \ln x \;\to\; y' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

La derivata del prodotto di più funzioni derivabili
è uguale alla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per tutte le altre:

$$\boxed{(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'}$$

Dimostrazione:

$$(fgh)' = ((fg)\cdot h)' = (fg)'\cdot h + (fg)\cdot h' = (f'g + fg')\cdot h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Esempi:

- $y = (x^2-1)\cdot \ln x \cdot \cos x$

  $y' = 2x\cdot\ln x\cdot\cos x + (x^2-1)\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos x + (x^2-1)\cdot\ln x\cdot(-\mathrm{sen}\, x)$

- $y = 3x^4 + x(2^x + x)$

  $y' = 3\cdot 4x^3 + 1\cdot(2^x + x) + x\cdot(2^x\ln 2 + 1) = 12x^3 + 2^x + x + x\cdot 2^x\ln 2 + x = 12x^3 + 2^x + 2x + x\cdot 2^x \ln 2$

- $y = 5x^3 \mathrm{sen}\, x$

  Vedendola come $y = 5(x^3\mathrm{sen}\, x) \to y' = 5(3x^2\mathrm{sen}\, x + x^3\cos x)$

  Vedendola come $y = (5x^3)\,\mathrm{sen}\, x \to y' = 15x^2\mathrm{sen} x + 5x^3\cos x$

  Vedendola (*ma non conviene!*) *come* $y = 5\cdot x^3\cdot\mathrm{sen}\, x \to y' = 0\cdot x^3\cdot\mathrm{sen}\, x + 5\cdot 3x^2\cdot\mathrm{sen}\, x + 5\cdot x^3\cdot\cos x$

4)
Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe derivabili in uno stesso punto x,
allora anche il loro quoziente $f(x)/g(x)$ è una funzione derivabile in quel punto,
e la derivata di tale funzione quoziente nel punto x si ottiene applicando una regola particolare.
Brevemente:

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili esiste e si ottiene con la seguente regola:

$$\boxed{y=\frac{f(x)}{g(x)} \to y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Altri modi di schematizzare il teorema possono essere:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}; \qquad D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{Df(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot Dg(x)}{[g(x)]^2}$$

Dimostrazione:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\left\{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\overset{\text{NOTA}}{=}$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\cdot\{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

NOTA - Anche in questo passaggio, come già nella dimostrazione del teorema sulla derivata di un prodotto, abbiamo utilizzato il fatto che la derivabilità di una funzione in un punto implica la continuità della stessa funzione in quel punto. Essendo, per HP, $g(x)$ derivabile nel punto x, $g(x)$ sarà anche continua in x, per cui si avrà $\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$

Esempio: $y=\frac{sen\,x}{x^3}\to y'=\frac{cos\,x\cdot x^3-sen\,x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^2(x\,cos\,x-3\,sen\,x)}{x^6}=\frac{x\,cos\,x-3\,sen\,x}{x^4}$

$$y=tg\,x=\frac{sen\,x}{cos\,x} \quad\to\quad y'=\frac{cos\,x\cdot cos\,x-sen\,x\cdot(-sen\,x)}{cos^2x}=\frac{cos^2x+sen^2x}{cos^2x}=\begin{cases}\dfrac{1}{cos^2x}\\[2ex] \dfrac{cos^2x}{cos^2x}+\dfrac{sen^2x}{cos^2x}=1+tg^2x\end{cases}$$

Pertanto $\boxed{y=tg\,x \to y'=\frac{1}{cos^2x} \quad oppure \quad y'=1+tg^2x}$

e analogamente si può dimostrare che $\boxed{y=cotg\,x \to y'=-\frac{1}{sen^2x} \quad oppure \quad y'=-\left[1+cotg^2x\right]}$

5)

Derivata del reciproco di una funzione derivabile (e, naturalmente, non nulla nel punto considerato):

$$\boxed{y=\frac{1}{f(x)}\to y'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

Dim.: Per il precedente teorema sulla derivata del quoziente di due funzioni, avremo, considerando $\frac{1}{f(x)}$ come quoziente fra la funzione costante 1 e la funzione $f(x)$: $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{0\cdot f-1\cdot f'}{f^2}=-\frac{f'}{f^2}$

Esempio: $y=\frac{1}{\ln x}\to y'=-\frac{1/x}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln^2 x}$

ESERCIZI Deriva le funzioni indicate:

1) $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - x - 12$
2) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3$
3) $y = ax^2 + bx + c$
4) $y = mx + q$
5) $y = \frac{x^2 + 3x}{6}$
6) $y = cx^{a+b}$
7) $y = \frac{4}{x}$
8) $y = 4\sqrt[4]{x}$
9) $y = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{6}$
10) $y = ax^{\alpha} + bx^{-\beta}$
11) $y = 2\,sen\,x - 3\cos x$
12) $y = 2e^x + x$
13) $y = x^2 + 3\ln x$
14) $y = x^3 \cdot \ln x$
15) $y = sen\,x \cos x$
16) $y = 4e^x \cos x$
17) $y = \left(x^2 + x - 2\right)e^x$
18) $y = \left(2x^2 + 5x - 2\right)\left(sen\,x + 1\right)$
19) $y = \frac{2x+3}{4x+5}$
20) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5}$
21) $\frac{x^2 - 5}{x^2 - 3x}$
22) $y = \frac{sen\,x}{x}$
23) $y = \frac{x^3}{\ln x}$
24) $\frac{\ln x + 2}{x + 2}$
25) $\frac{2x + 3e^x}{x^2}$
26) $y = \frac{x - sen\,x}{x - \cos x}$
27) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$
28) $y = \frac{1}{\ln x}$
29) $y = \frac{7}{x^2 + 1}$
30) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}$
31) $y = ax + b + \frac{1}{ax + b}$
32) $y = x\,e^x \cos x$
33) $y = x^2 \cdot \left(e^x - 2\right)\ln x$
34) $y = x\left(x + sen\,x\right)\left(x + \cos x\right)$
35) $\frac{x+1}{x^2}\,sen\,x\left(2\cos x + 1\right)$

RISPOSTE

1) $y' = 4x^3 + 15x^2 - 6x - 1$
2) $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$
3) $y' = 2ax + b$
4) $y' = m$
5) $y' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{2x+3}{6}$
6) $y' = c\left(a + b\right)x^{a+b-1}$
7) $y' = -\frac{4}{x^2}$
8) $y' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$
9) $y' = \frac{1}{8\sqrt[4]{x}}$
10) $y' = a\alpha x^{\alpha-1} - \frac{b\beta}{x^{\beta+1}}$
11) $y' = 2\cos x + 3\,sen\,x$
12) $y' = 2e^x + 1$
13) $y' = 2x + \frac{3}{x}$
14) $y' = 3x^2 \cdot \ln x + x^2 = x^2\left(3\ln x + 1\right)$
15) $y' = \cos^2 x - sen^2 x$
16) $y' = 4e^x\left(\cos x - sen\,x\right)$
17) $y' = \left(2x + 1\right)e^x + \left(x^2 + x - 2\right)e^x = \left(x^2 + 3x - 1\right)e^x$
18) $y' = \left(4x + 5\right)\left(sen\,x + 1\right) + \left(2x^2 + 5x - 2\right)\cos x$
19) $y' = -\frac{2}{\left(4x+5\right)^2}$
20) $y' = \frac{3x^2 - 10x + 15}{\left(x^2 - 5\right)^2}$
21) $y' = -\frac{3x^2 - 10x + 15}{\left(x^2 - 3x\right)^2}$
22) $y' = \frac{x\cos x - sen\,x}{x^2}$
23) $y' = \frac{x^2\left(3\ln x - 1\right)}{\ln^2 x}$
24) $y' = \frac{2 - x - x\ln x}{x\left(x + 2\right)^2}$
25) $y' = \frac{3x^2 e^x - 6xe^x - 2x^2}{x^4}$
26) $y' = \frac{1 + sen\,x - \cos x - x\left(sen\,x + \cos x\right)}{\left(x - \cos x\right)^2}$
27) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$
28) $y' = -\frac{1}{x\ln^2 x}$
29) $y' = -\frac{14x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$
30) $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$
31) $y' = a - \frac{a}{\left(ax + b\right)^2}$
32) $y' = e^x \cos x + x\,e^x \cos x - x\,e^x\,sen\,x$
33) $y' = 2x \cdot \left(e^x - 2\right)\ln x + x^2 \cdot e^x \ln x + x \cdot \left(e^x - 2\right)$
34) $y' = \left(x + sen\,x\right)\left(x + \cos x\right) + x\left(1 + \cos x\right)\left(x + \cos x\right) + x\left(x + sen\,x\right)\left(1 - sen\,x\right)$
35) $y' = -\frac{x+2}{x^3}\,sen\,x\left(2\cos x + 1\right) + \frac{x+1}{x^2}\cos x\left(2\cos x + 1\right) + \frac{x+1}{x^2}\,sen\,x\left(1 - 2\,sen\,x\right)$

8) ESERCIZI "TIPICI" CON APPLICAZIONE DELLA DERIVATA; PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO DI UNA FUNZIONE

1) Traccia il "GRAFICO PROBABILE" della funzione $y = \ln x - 2x$
determinandone poi anche il PUNTO DI MASSIMO.

IL "GRAFICO PROBABILE" DI UNA FUNZIONE

E' quello che si può tracciare dopo aver determinato:

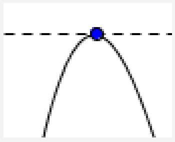
a) il dominio;
b) le intersezioni con gli assi;
c) la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);
d) i limiti ai confini del dominio.

PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO "LOCALE" DI UNA FUNZIONE

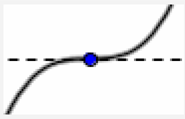
In corrispondenza di questi punti,
la retta tangente al grafico (qualora esista)
è orizzontale, quindi ha coefficiente angolare uguale a 0.

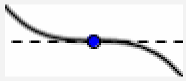
Perciò per determinarli:
a) si calcolerà la derivata $f\,'(x)$ della funzione
b) poi "la si porrà uguale a 0", ossia si imposterà l'equazione
$f\,'(x) = 0$.

Le soluzioni di tale equazione saranno
quei valori di x in corrispondenza dei quali il grafico
presenta una delle situazioni illustrate in figura.


MASSIMO


MINIMO


FLESSO ORIZZONTALE ASCENDENTE


FLESSO ORIZZONTALE DISCENDENTE

SVOLGIMENTO

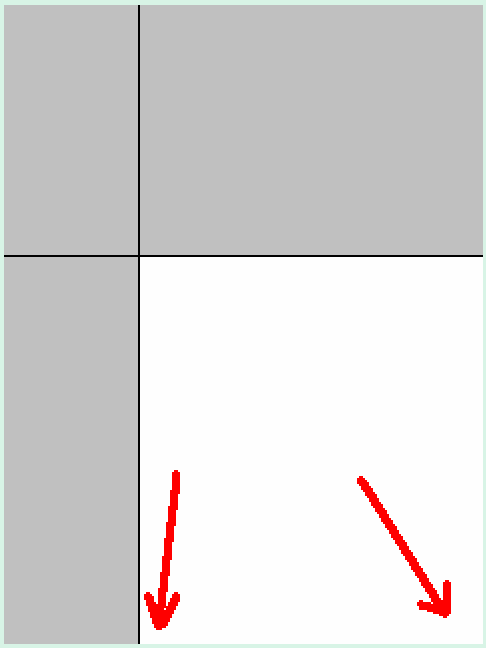
a) Il dominio della funzione $y = \ln x - 2x$ è (condizione di esistenza del logaritmo) $x > 0$.

b) Intersezione con l'asse y:
non esiste, perché non si può dare a x il valore 0!

Intersezioni con l'asse x:
pongo $y = 0$, imposto cioè l'equazione $\ln x - 2x = 0$.
Questa equazione non è risolubile con metodi elementari;
però portandola sotto la forma $\ln x = 2x$
e risolvendola per via grafica, si vede che è impossibile.
Pertanto il nostro grafico non interseca neppure l'asse x.

c) Positività: mi chiedo per quali valori di x si ha $\ln x - 2x > 0$
La disequazione non è risolubile con metodi elementari;
portandola sotto la forma $\ln x > 2x$
e risolvendola per via grafica, si vede che è impossibile.
Pertanto il può mai risultare $\ln x - 2x > 0$,
il grafico delle funzione starà sempre
al di sotto dell'asse orizzontale.

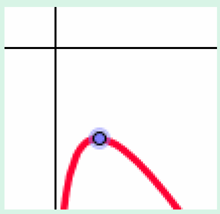
d) Limiti ai confini del dominio: $\lim_{x \to 0^+} (\ln x - 2x) = -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} (\ln x - 2x) = -\infty$



Da quanto precede si trae che deve esserci per forza un punto di massimo!

La derivata della funzione è $y' = \frac{1}{x} - 2$ e uguagliandola a 0 si trova $x = \frac{1}{2}$;

perciò il massimo ha coordinate $M\left(\frac{1}{2}, -(1 + \ln 2)\right)$



2) Considera la funzione $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$ e tracciane il "grafico probabile".

Constaterai che la funzione deve presentare sia un minimo che un massimo: determinane le coordinate.

3) a) Traccia il "grafico probabile" della funzione $g(x) = x^3 - x$,
b) poi determina le coordinate del suo minimo e del suo massimo.

4) Stabilisci per quale valore del parametro a la curva grafico della funzione $y = f(x) = x^3 + ax^2 + x$ ha, nel punto di ascissa 1, retta tangente orizzontale.
Stabilisci poi la natura di questo punto:
è di massimo relativo? Di minimo relativo? Né l'uno né l'altro?

5) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^4 - 5x - 1$ nel suo punto di ascissa 2.

L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE
AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UN SUO PUNTO:

La Geometria Analitica insegna che l'equazione della retta di coeff. angolare *m*, passante per (x_0, y_0) è:

$$r:\ y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ora, poiché la derivata di una funzione in un punto fornisce il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto,

l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 è:

$$\boldsymbol{t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

6) Per quali valori di x la retta tangente al grafico della funzione $y = x^3 - x^2$ è inclinata di $+45°$?

7) Determina le equazioni delle rette tangenti alla curva $y = x^3 - x$, condotte dal punto $A(2, -2)$.

SUGGERIMENTO:
si potrebbe provare a scrivere l'equazione della generica retta per A: $y + 2 = m(x-2)$,
poi porla a sistema con l'equazione della curva allo scopo di cercare i valori di m
per i quali retta e curva hanno un'intersezione "doppia"…
… ma la ricerca di tali valori è problematica, poiché l'equazione risolvente del sistema
è di terzo grado e non di secondo!
Allora cambieremo strategia.
Consideriamo il generico punto $P(t, f(t))$ della curva,
scriviamo l'equazione della retta tangente alla curva in P (in questa equazione t farà da parametro),
e imponiamo infine il passaggio di tale retta per A …

RISPOSTE

2) Dominio: tutto $\mathbb{R}$; intersezioni con gli assi: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$ e $(1, 0)$; $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0$.

Da queste informazioni si trae che devono per forza esserci sia un punto di minimo che uno di massimo.

La derivata della funzione data è $y' = -\dfrac{x^2-2x-3}{\left(x^2+3\right)^2}$; minimo in $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$, massimo in $\left(3, \dfrac{1}{6}\right)$

3) max in $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, min in $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

4) $a = -2$; minimo

5) $t:\ y = 27x - 49$

6) $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = 1$

7) $P\left(t, t^3 - t\right)$ e l'equazione della retta tangente in P è $y - \left(t^3 - t\right) = \left(3t^2 - 1\right)(x - t)$

Le due tangenti passanti per A hanno equazioni $y = -x$ e $y = 26x - 54$

9) DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

La derivata di una funzione composta (= funzione di funzione) si ottiene (dim. alle pagine 20 e 21):

a) derivando la funzione principale (= quella che si applica per ultima) "rispetto al suo argomento z"
(voglio dire: **facendo finta che il suo argomento** non sia a sua volta una funzione,
ma **sia una variabile indipendente** z; al posto di z, però, va sempre scritta
l'espressione che nella nostra mente abbiamo sostituito con z)

b) poi moltiplicando ciò che si è ottenuto per la derivata dell'argomento z.

Il procedimento a)+b) va eventualmente iterato per gli argomenti più interni,
se si ha una funzione "composta più volte"

… Capito? 

Coraggio! Dal punto di vista pratico, vedrai che non è poi così terribile.
Gli ESEMPI qui sotto riportati faranno chiarezza.

$$\boldsymbol{y = sen^3 x = (sen\,x)^3} \qquad x \xrightarrow{sen\,(\bullet)} sen\,x \xrightarrow{(\bullet)^3} \boxed{(\overbrace{sen\,x}^{z})^3}$$

ULTIMA funzione applicata: il "CUBO"

In generale:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = [f(x)]^{\alpha} \\ y' = \alpha\,[f(x)]^{\alpha-1}\cdot f'(x) \end{array}}$$

Si deriva **PER PRIMA la funzione che è stata applicata PER ULTIMA:** in questo caso, la funzione "cubo".

a) DERIVIAMO dunque z^3, DOVE PERO' il nostro "z" è il blocco "$sen\,x$"; otteniamo $3\cdot z^2$, ossia $3(sen\,x)^2$;

b) POI MOLTIPLICHIAMO per la derivata di $z = sen\,x$, che è $cos\,x$.

In definitiva, la derivata cercata sarà $y' = 3(sen\,x)^2\,cos\,x = 3\,sen^2 x\,cos\,x$

$$y = e^{2x+3} \qquad x \xrightarrow{2(\bullet)+3} 2x+3 \xrightarrow{e^{(\bullet)}} e^{2x+3}$$
$$y' = e^{2x+3}\cdot 2 = 2e^{2x+3}$$

$$x \xrightarrow{f\,(\bullet)} f(x) \xrightarrow{e^{(\bullet)}} e^{f(x)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} y = e^{f(x)} \\ y' = e^{f(x)}\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = \ln\left(x^2-5x+4\right) \qquad x \xrightarrow{(\bullet)^2-5(\bullet)+4} x^2-5x+4 \xrightarrow{\ln(\bullet)} \ln\left(x^2-5x+4\right)$$
$$y' = \frac{1}{x^2-5x+4}\cdot(2x-5) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4}$$

$$x \xrightarrow{f\,(\bullet)} f(x) \xrightarrow{\ln(\bullet)} \ln f(x) \qquad \boxed{\begin{array}{l} y = \ln f(x) \\ y' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \end{array}}$$

$$y = sen\,x^3 \qquad x \xrightarrow{(\bullet)^3} x^3 \xrightarrow{sen\,(\bullet)} sen\,x^3$$
$$y' = cos\,x^3\cdot 3x^2 = 3x^2 cos\,x^3$$

$$x \xrightarrow{f\,(\bullet)} f(x) \xrightarrow{sen\,(\bullet)} sen\,f(x) \qquad \boxed{\begin{array}{l} y = sen\,f(x) \\ y' = cos\,f(x)\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = cos\,2x \qquad y' = -sen\,2x\cdot 2 = -2\,sen\,2x \qquad \boxed{y = cos\,f(x) \quad y' = -sen\,f(x)\cdot f'(x)}$$

$$y = tg\left(x^4+5\right)$$
$$y' = \frac{1}{cos^2\left(x^4+5\right)}\cdot 4x^3 = \left[1+tg^2\left(x^4+5\right)\right]\cdot 4x^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = tg\,f(x) \\ y' = \dfrac{1}{cos^2 f(x)}\cdot f'(x) = \left[1+tg^2 f(x)\right]\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = cotg\,7x$$
$$y' = -\frac{1}{sen^2 7x}\cdot 7 = -\left[1+cotg^2 7x\right]\cdot 7$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = cotg\,f(x) \\ y' = -\dfrac{1}{sen^2 f(x)}\cdot f'(x) = -\left[1+cotg^2 f(x)\right]\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = a^{cos\,x} \qquad y' = a^{cos\,x}\cdot\ln a\cdot(-sen\,x) \qquad \boxed{y = a^{f(x)} \quad y' = a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)}$$

$$y = \log_4(3x+2) \qquad y' = \frac{1}{3x+2}\cdot\log_4 e\cdot 3 = \frac{3}{3x+2}\cdot\log_4 e \qquad \boxed{y = \log_a f(x) \quad y' = \frac{1}{f(x)}\cdot\log_a e\cdot f'(x)}$$

$$y = \frac{1}{sen\,x} = (sen\,x)^{-1} \qquad y' = -1\cdot(sen\,x)^{-2}\cdot cos\,x = -\frac{cos\,x}{sen^2 x} \qquad \boxed{y = \frac{1}{f(x)} \quad y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

$$y = \left(1+x^2+x^4\right)^6 \qquad x \xrightarrow{1+(\bullet)^2+(\bullet)^4} 1+x^2+x^4 \xrightarrow{(\bullet)^6} \left(1+x^2+x^4\right)^6 \qquad y' = 6\left(1+x^2+x^4\right)^5\cdot\left(2x+4x^3\right)$$

$y = \ln\, sen\, 5x$ (qui, come poi nell'esempio successivo, abbiamo una composizione di TRE funzioni!)

$$x \xrightarrow{5(\bullet)} 5x \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\,5x \xrightarrow{\ln(\bullet)} \ln\, sen\,5x \quad DUNQUE \quad y' = \frac{1}{sen\,5x}\cdot cos\,5x \cdot 5 = \frac{5cos\,5x}{sen\,5x} = 5cotg\,5x$$

In generale, quando le funzioni sono tre:

$$y = h\big(g(f(x))\big)$$

$$x \xrightarrow{f(\bullet)} f(x) \xrightarrow{g(\bullet)} g(f(x)) \xrightarrow{h(\bullet)} h\big(g(f(x))\big)$$

$$Se\ \ y = h\big(g(f(x))\big)\ \ allora\ \ y' = h'\big(g(f(x))\big)\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Il tutto si può scrivere in modo **efficacissimo** con la **notazione di Leibniz**:

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg}\cdot\frac{dg}{df}\cdot\frac{df}{dx}}$$

$$y = sen\,e^{x^2} \qquad x \xrightarrow{(\bullet)^2} x^2 \xrightarrow{e^{(\bullet)}} e^{x^2} \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\,e^{x^2} \quad DUNQUE \quad y' = cos\,e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x = 2x\,e^{x^2}cos\,e^{x^2}$$

Derivazione di una potenza ad esponente qualsiasi

Dal teorema segue un risultato molto importante che avevamo già anticipato senza dimostrazione, ossia:

la formula per la derivazione di una potenza: $\boxed{y = x^n \to y' = nx^{n-1}}$

già provata nel caso che l'esponente fosse un numero naturale: $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

si estende a QUALUNQUE esponente reale (positivo, negativo, frazionario, irrazionale):

$$\boxed{y = x^{\alpha} \to y' = \alpha\,x^{\alpha-1},\quad \boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}}}$$

Basta scrivere la potenza sotto forma di esponenziale di un logaritmo: $y = x^{\alpha} = e^{\ln(x^{\alpha})} = e^{\alpha \ln x}$

dopodichè si avrà: $D\left(x^{\alpha}\right) = D\left(e^{\alpha \ln x}\right) = e^{\alpha \ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\,x^{\alpha-1}$, C.V.D..

Ad esempio: $y = \sqrt[5]{sen\,x} = (sen\,x)^{\frac{1}{5}} \;\to\; y' = \frac{1}{5}(sen\,x)^{-\frac{4}{5}}\cdot cos\,x = \frac{cos\,x}{5\sqrt[5]{(sen\,x)^4}} = \frac{cos\,x}{5\sqrt[5]{sen^4 x}}$

Derivazione di una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$

Questo accorgimento di esprimere la funzione data come esponenziale di un logaritmo si applica anche per la derivazione di una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$. Si procede come segue:

$$D[f(x)]^{g(x)} = D\,e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = D\,e^{g(x)\ln f(x)} =$$

$$= e^{g(x)\ln f(x)}\cdot\left\{g'(x)\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right\} = [f(x)]^{g(x)}\cdot\left\{g'(x)\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

Niente paura, però: la formulaccia precedente non è assolutamente da imparare a memoria!
Si tratta invece di applicare lo stesso procedimento in tutti i casi particolari di questo tipo.

Esempio: se devo derivare la funzione x^x, mi basta solo
ricordare di trasformarla in esponenziale-di-un-logaritmo: il resto verrà da sé!

Ad esempio: $D\,x^x = De^{\ln x^x} = De^{x\ln x} = e^{x\ln x}\cdot\left\{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right\} = x^x(\ln x + 1)$

La derivata del logaritmo di un valore assoluto

La derivata della funzione $y = \ln|x|$ è $y = \dfrac{1}{x}$ SU TUTTO $\mathbb{R}$, cioè sia con $x > 0$ che con $x < 0$

Si tratta ancora di una conseguenza del teorema sulla derivazione di una funzione composta:

con $x > 0$, si ha $y = \ln|x| = \ln x \to y' = \frac{1}{x}$, e con $x < 0$ si ha $y = \ln|x| = \ln(-x) \to y' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

Ad esempio: $D\,\ln\left|x^2 - 7\right| = \frac{1}{x^2-7}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-7}$ … e questo vale per *tutti* i valori di x.

Gli ESERCIZI sulla derivazione delle funzioni composte si trovano alla successiva pagina 20,
mentre la DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA è riportata alle pagine 21 e 22.

ESERCIZI

Derivare le seguenti funzioni:

1) $y = sen\,2x$ 2) $y = sen^2 x$ 3) $y = e^{sen\,x}$ 4) $y = e^{x^2}$ 5) $y = \ln^2 x$ 6) $y = \ln x^2$

7) $y = \ln 2x$ 8) $y = \left(x^2 + 2x\right)^8$ 9) $y = \sqrt{sen\,x + 2}$ 10) $y = x^2 + sen\dfrac{1}{x}$ 11) $y = e^{1/x}$ 12) $y = \dfrac{1}{e^x}$

13) $y = sen\,\ln x$ 14) $y = \ln sen\,x$ 15) $y = \ln\ln x$ 16) $y = \left(sen\,x - cos\,x\right)^2$

17) $y = cos\,e^{2x}$ 18) $y = \ln\left(sen\,3x + 2\right)$ 19) $e^{sen^2 x}$ 20) $y = \ln\ln\ln x$

21) $y = tg\,2x$ 22) $y = tg\,x^2$ 23) $y = tg^2 x$ 24) $y = 5/tg\,3x$

25) $\ln\left(x^2+1\right)$ 26) $y = 3e^{x^2-4} - 5$ 27) $y = \ln\left(3sen^2 x + 2\right)$ 28) $y = e^{2x} + cos\,2x$

29) $y = x + e^{sen\,x\,cos\,x}$ 30) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 31) $y = \dfrac{sen^2 x}{x^2}$ 32) $y = \dfrac{1}{sen^4 3x}$

33) $y = \sqrt[3]{(4x-5)^2}$ 34) $y = \log_2 tg\,x$ 35) $y = \sqrt{sen\sqrt{x}}$ 36) $y = \dfrac{e^{x^2}}{x^2 - 4x + 1}$

37) $y = \sqrt[5]{\ln^4 x}$ 38) $y = \sqrt[3]{e^{2x} - x}$ 39) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 40) $y = \sqrt[4]{cos^3 x^2}$

41) $y = \left(sen\,x\right)^x$ 42) $y = \left(e^x + 1\right)^{sen\,x}$ 43) $y = \ln cos\,x$ 44) $y = \ln\left|cos\,x\right|$

RISULTATI

1) $y' = 2\,cos\,2x$ 2) $y' = 2\,sen\,x\,cos\,x$ 3) $y' = cos\,x \cdot e^{sen\,x}$ 4) $y' = 2x\,e^{x^2}$

5) $y' = \dfrac{2\ln x}{x}$ 6) $y' = \dfrac{2}{x}$ 7) $y' = \dfrac{1}{x}$ 8) $y' = 8\left(x^2+2x\right)^7\left(2x+2\right) = 16x^7\left(x+2\right)^7\left(x+1\right)$

9) $y' = \dfrac{cos\,x}{2\sqrt{sen\,x+2}}$ 10) $y' = 2x - \dfrac{1}{x^2}\,cos\dfrac{1}{x}$ 11) $y' = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$ 12) $y' = -\dfrac{1}{e^x}$

13) $y' = \dfrac{cos\,\ln x}{x}$ 14) $y' = \dfrac{cos\,x}{sen\,x} = cotg\,x$ 15) $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$ 16) $y' = 2\left(sen\,x - cos\,x\right)\left(cos\,x + sen\,x\right)$

17) $y' = -2e^{2x}sen\,e^{2x}$ 18) $y' = \dfrac{3\,cos\,3x}{sen\,3x+2}$ 19) $y' = 2\,sen\,x\,cos\,x \cdot e^{sen^2 x}$ 20) $y' = \dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$

21) $y' = 2\left(1 + tg^2 2x\right)$ 22) $y' = 2x\left(1 + tg^2 x^2\right)$ 23) $y' = 2\,tg\,x\left(1 + tg^2 x\right)$ 24) $y' = -\dfrac{15\left(1 + tg^2 3x\right)}{tg^2 3x}$

25) $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 26) $y' = 6x\,e^{x^2-4}$ 27) $y' = \dfrac{6\,sen\,x\,cos\,x}{3sen^2 x + 2}$ 28) $y' = 2e^{2x} - 2sen\,2x$

29) $y' = 1 + \left(cos^2 x - sen^2 x\right)e^{sen\,x\,cos\,x}$ 30) $y' = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ 31) $y' = \dfrac{2\,sen\,x\left(x\,cos\,x - sen\,x\right)}{x^3}$

32) $y' = -\dfrac{12\,cos\,3x}{sen^5 3x}$ 33) $y' = \dfrac{8}{3\sqrt[3]{4x-5}}$ 34) $y' = \dfrac{1 + tg^2 x}{tg\,x}\log_2 e$

35) $y' = \dfrac{cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\,sen\sqrt{x}}}$ 36) $y' = \dfrac{2e^{x^2}(x^3 - 4x^2 + 2)}{(x^2-4x+1)^2}$ 37) $y' = \dfrac{4}{5x\sqrt[5]{\ln x}}$

38) $y' = \dfrac{2e^{2x} - 1}{3\sqrt[3]{\left(e^{2x} - x\right)^2}}$ 39) $y' = \dfrac{1}{2(x+1)^2}\sqrt[4]{\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^3}} = \dfrac{1}{2(x+1)(x-1)}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

40) $y' = -\dfrac{3x\,sen\,x^2}{2\sqrt[4]{cos\,x^2}}$ 41) $y' = \left(sen\,x\right)^x \cdot \left(\ln sen\,x + x \cdot \dfrac{cos\,x}{sen\,x}\right)$

42) $y' = \left(e^x+1\right)^{sen\,x} \cdot \left\{cos\,x\ln(e^x+1) + sen\,x \cdot \dfrac{e^x}{e^x+1}\right\}$ 43) $y' = -tg\,x$ 44) $y' = -tg\,x$

DIMOSTRAZIONE del teorema sulla derivata di una funzione composta

Per capire meglio quali sono le diverse quantità in gioco,
pensiamo all'esempio specifico della funzione $y = sen^3 x = (sen\,x)^3$:

si parte da *x*,

a) si passa attraverso un calcolo intermedio applicando a *x* la funzione "*seno*" che fornisce il numero $z = sen\,x$,
b) infine si applica la funzione "*cubo*" a questo numero *z*, ottenendo il valore finale $y = sen^3 x = (sen\,x)^3$.

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{sen(\bullet)} \overbrace{\boldsymbol{sen\,x}}^{z} \xrightarrow{(\bullet)^3} \underbrace{\overbrace{\boldsymbol{(sen\,x)^3}}^{z}}_{\boldsymbol{y}} = sen^3 x$$

Siamo d'accordo con il ruolo dei simboli x, z, y ? OK? Possiamo allora partire col caso generale.

Noi vogliamo costruire il rapporto incrementale della funzione composta $y(x)$,
che è poi "$y - che - dipende - da - z - che - dipende - da - x$", ossia $y = y\big(z(x)\big)$.

All'ascissa di partenza x corrisponde il valore z al quale corrisponde poi il valore y.
Se ora noi passiamo da x a $x + \Delta x$,
la quantità intermedia z subisce un incremento Δz che la porta al nuovo valore $z + \Delta z$;
dopodiché, al valore $z + \Delta z$, corrisponderà un determinato valore $y + \Delta y$:

$$\begin{array}{lll} x & \to z & \to y \\ x+\Delta x & \to z+\Delta z & \to y+\Delta y \end{array}$$

Il rapporto incrementale della funzione composta $y = y(x) = y\big(z(x)\big)$ è $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

ma si può scrivere $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$.

Ora facciamo tendere Δx a zero.
Supponiamo che la funzione z sia derivabile in x:
essa sarà allora certamente continua in x per un teorema ben noto e pertanto anche Δz tenderà a 0;
dunque avremo (supponendo altresì che la funzione y sia derivabile in z):

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \to z'(x) \quad \text{e} \quad \frac{\Delta y}{\Delta z} \to y'(z).$$

Resta perciò dimostrato che

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = \boldsymbol{y'(z) \cdot z'(x)}$$, cioè la tesi.

C'è però un piccolo guaio.
Non sarebbe onesto affermare che questa dimostrazione è del tutto generale e completa:
infatti essa non tiene conto del fatto che Δz si potrebbe eventualmente annullare!!!
Sei d'accordo?
Può anche capitare, per una funzione $z = z(x)$, che,
fissata un'ascissa x e dato a x un incremento Δx, risulti tuttavia $z(x + \Delta x) = z(x)$ e cioè $\Delta z = 0$.
Ma se così fosse, il nostro discorso, che comporta la presenza di Δz a denominatore, crollerebbe.

Caro lettore, se non sei particolarmente interessato ad approfondimenti, accontentati pure di quanto scritto sopra (che costituisce una dimostrazione del teorema nel caso, invero di gran lunga il più frequente,
in cui esiste per lo meno un intorno di *x* nell'ambito del quale, qualunque sia l'incremento che si dà alla *x*,
la quantità $z(x)$ subisce sempre un incremento ***non nullo***).

Se invece desideri la dimostrazione del tutto generale, prosegui la lettura.

Insieme con la dimostrazione generale, daremo anche l'enunciato astratto del teorema, che, se badi, fino a questo momento non abbiamo mai formulato, accontentandoci della descrizione "alla buona" iniziale (quella che aveva tanto angosciato Snoopy) e della rassegna di esempi.

Per una dimostrazione completamente generale del teorema sulla derivazione delle funzioni composte, ritengo preferibile indicare l'ascissa fissata con x_0 *anziché con x.*

Teorema sulla derivazione di una funzione composta (= funzione di funzione)

$$x \xrightarrow{f} \underbrace{f(x)}_{z} \xrightarrow{g} \underbrace{g\big(f(x)\big)}_{y=F(x)} \qquad x \to F(x) = g\big(f(x)\big)$$

Sia $z = f(x)$ definita su tutto un intorno di x_0 e derivabile in x_0.
Sia $y = g(z)$ definita su tutto un intorno di $z_0 = f(x_0)$ e derivabile in z_0.
Allora la funzione composta $y = F(x) = g\big(f(x)\big)$ è derivabile in x_0 e risulta
$F'(x_0) = g'(z_0) \cdot f'(x_0)$

Dimostrazione

Essendo per ipotesi $g(z)$ derivabile in z_0, si ha $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} = g'(z_0)$

da cui (scrittura fuori dal segno di limite) $\dfrac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} = g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)$ *con* $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ *quando* $\Delta z \to 0$

e quindi vale l'uguaglianza **(1)** $g(z_0+\Delta z)-g(z_0) = \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\Delta z$ *con* $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ *quando* $\Delta z \to 0$.

Bene!
Abbiamo quindi scritto la (1), nella quale compaiono gli incrementi Δz della var. z, calcolati rispetto al punto z_0.
La (1) è stata ricavata partendo da un rapporto incr. con Δz a denominatore, per cui va pensata valida per $\Delta z \neq 0$;
tuttavia, è proprio il caso $\Delta z = 0$ la "pietra dello scandalo" che ci ha costretto a cercare una diversa dimostrazione.
Ora, se, a posteriori, pensiamo alla (1) con $\Delta z = 0$, vediamo che essa,
avendo il primo membro nullo e il secondo membro caratterizzato dalla presenza di un fattore nullo,
continuerebbe ad esser valida se non fosse per il fatto che, in questo caso, la quantità $\varepsilon(\Delta z)$,
che era stata introdotta come differenza fra il rapporto incrementale e la derivata, non avrebbe significato.
Ma noi possiamo attribuire a $\varepsilon(\Delta z)$, nel caso $\Delta z = 0$, un valore convenzionale, ad es. ponendo, per $\Delta z = 0,\ \varepsilon(\Delta z) = 0$.
Facciamo dunque così. In definitiva, la quantità $\varepsilon(\Delta z)$ che compare nella (1) avrà il valore

$$\begin{cases} \varepsilon(\Delta z) = \dfrac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} - g'(z_0) & con\ \Delta z \neq 0; \\ \varepsilon(\Delta z) = 0 & con\ \Delta z = 0 \end{cases}$$

e la (1) risulterà valida anche con $\Delta z = 0$.

La relazione (1) trae la sua verità dal fatto che l'ipotesi afferma la derivabilità di $g(z)$ in z_0.
$g(z)$ è una funzione, definita su tutto un intorno di z_0;
fin qui, NON stiamo ancora riguardando z come variabile che dipende da x, stiamo trattando z
come una variabile indipendente, e indicando con Δz lo scostamento del suo valore dal valore-base z_0.
Fra un attimo riguarderemo invece z come variabile dipendente da x; al variare di x, varierà anche z;
con $x = x_0$, sarà $z = z_0$, e quando x subirà un incremento algebrico Δx diventando $x_0 + \Delta x$,
allora z diventerà $z_0 + \Delta z$, subendo un ben determinato incremento algebrico Δz (dipendente da Δx),
che potrà eventualmente anche essere nullo.
Quindi, nel seguito, il simbolo Δz, prima usato per indicare un generico incremento algebrico $z - z_0$,
passerà ad indicare quel *ben determinato* incremento algebrico, eventualmente anche nullo,
che la $z(x)$ subisce quando da $x = x_0$ si passa a $x = x_0 + \Delta x$.

Dopo questa premessa, andiamo a costruire il rapporto incrementale in x_0 della funzione $F(x)$.

Avendosi
$$\begin{array}{lllll} x_0 & \to & z_0 = f(x_0) & \to & y_0 = g(z_0) = g\big(f(x_0)\big) = F(x_0) \\ x_0+\Delta x & \to & z_0+\Delta z = f(x_0+\Delta x) & \to & y_0+\Delta y = g(z_0+\Delta z) = g\big(f(x_0+\Delta x)\big) = F\big(x_0+\Delta x\big) \end{array}$$

sarà
$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta x} = \frac{\left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\Delta z}{\Delta x} =$$
$$= \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x} = \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\cdot\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

e quindi, facendo tendere Δx a 0, dal momento che quando $\Delta x \to 0$, anche $\Delta z \to 0$ ed $\varepsilon(\Delta z) \to 0$, avremo

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\cdot\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = g'(z_0)\,f'(x_0), \quad \text{C.V.D.}$$

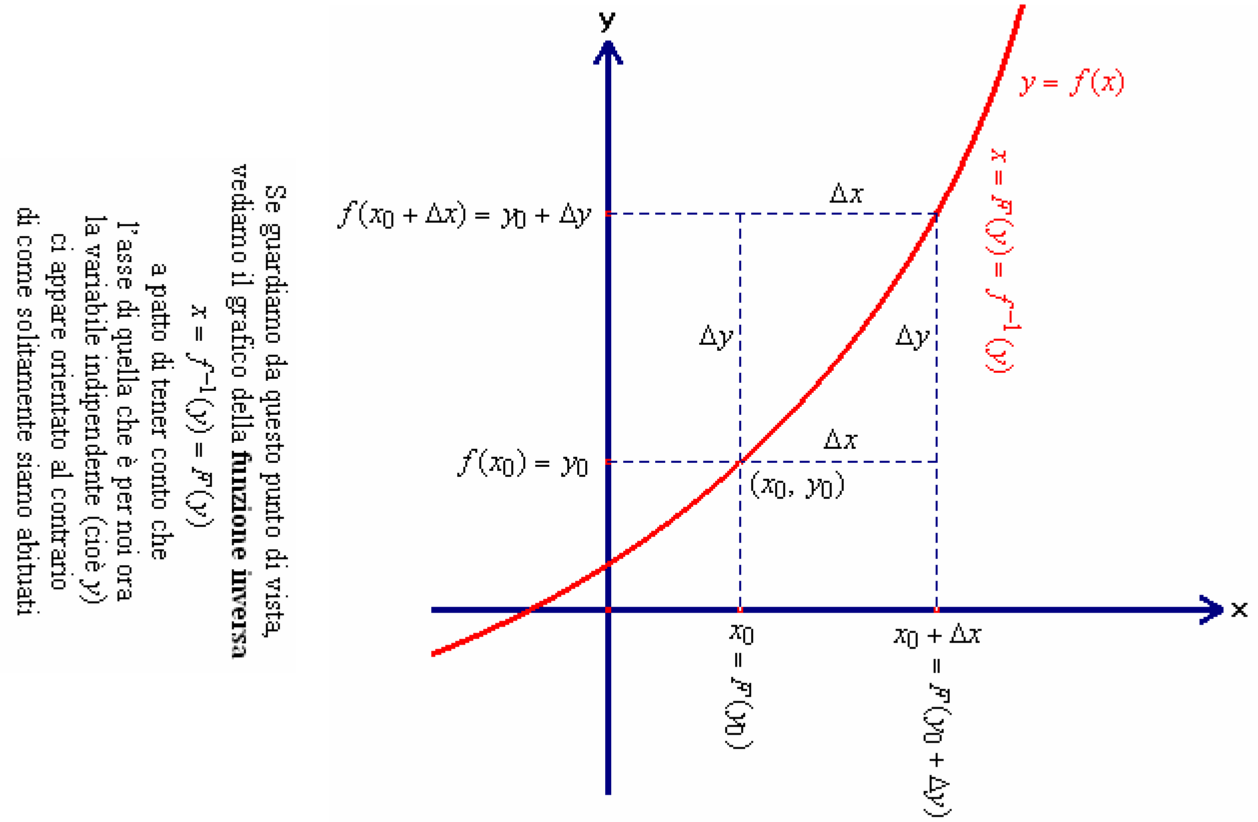
10) LA FORMULA PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia $y = f(x)$ una funzione (**funzione diretta**),

e sia $x = f^{-1}(y) = F(y)$ la rispettiva **funzione inversa**

(osserviamo che
per il discorso che ci interessa in questo momento, sarebbe controproducente scambiare, nella funzione inversa, i nomi delle variabili come abbiamo invece fatto in altre occasioni!).

Sia (x_0, y_0) un punto del grafico della funzione diretta f : $\quad x_0 \xrightarrow{f} y_0; \quad y_0 \xrightarrow{F=f^{-1}} x_0$



Se guardiamo da qui, vediamo la **funzione diretta** $y = f(x)$

$$\textit{rapporto incrementale della } F(= f^{-1}) \textit{ in } y_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\textit{rapporto incrementale della } f \textit{ in } x_0}$$

Supponiamo ora f derivabile in x_0, con $f'(x_0) \neq 0$;
f sarà dunque anche continua in x_0;
di conseguenza, *per un teorema a noi noto*, anche la funzione inversa F sarà continua in $y_0 = f(x_0)$.
Quando perciò faremo tendere Δy a zero, anche Δx tenderà a zero.

Possiamo scrivere: $\displaystyle \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} \overset{\text{NOTA}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$

ossia $\displaystyle F'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

NOTA. Abbiamo già puntualizzato che quando Δy tende a zero, anche Δx tende a zero.
Δx può essere riguardata come quantità che dipende da Δy (= come funzione di Δy);
quindi possiamo pensare ad una composizione di funzioni,
sulla quale è applicabile il "*Teorema di sostituzione*".

Tutto ciò dimostra

(sostituendo, a questo punto, il simbolo x_0 col simbolo *x* e il simbolo y_0 col simbolo *y*, ma tenendo comunque sempre presente che *x*, *y* devono indicare due valori che "si corrispondono"),
il seguente

Teorema
La derivata di una funzione inversa
è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta
(purché quest'ultima derivata esista e non sia nulla).

In simboli:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

essendo:

- x **un punto fissato;**
- $F = f^{-1}$ **funzione inversa di** f **;**
- $f'(x)$ **esistente e non nulla;**
- y **immagine di** x **attraverso la** f **;**
- x **controimmagine di** y **attraverso la** f **(o anche: immagine di** y **attraverso la** $F = f^{-1}$ **)**

E' IMPORTANTISSIMO RICORDARE che
le due derivate che compaiono nella formula si intendono calcolate
in due punti CHE SI CORRISPONDONO!

$$y = f(x) \qquad x = F(y) = f^{-1}(y)$$

ESEMPIO

Partiamo dalla funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ *(funzione diretta)*

e, ricavando x dall'uguaglianza, otteniamo $x = f^{-1}(y) = F(y) = \sqrt[3]{y-1}$ *(funzione inversa).*

Abbiamo, ad esempio, che per $x = 2$ *la y corrispondente è* $y = f(2) = 8 + 1 = 9$

In questo caso, la formula darà: $F'(9) = \frac{1}{f'(2)}$. Andiamo a controllare se è vero!

Calcoliamo $F'(9)$: $\quad F'(y) = \frac{1}{3}(y-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} \to \boxed{F'(9)} = \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}\right]_{y=9} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \boxed{\frac{1}{12}}$

Calcoliamo $f'(2)$: $\quad f'(x) = 3x^2 \to \boxed{f'(2)} = \left[3x^2\right]_{x=2} = \boxed{12}$

OK!!! $F'(9)$ *ed* $f'(2)$ *sono effettivamente numeri fra loro reciproci!*

ESERCIZIO SVOLTO

La funzione $y = 2x^2 + \ln x$ **è definita per** $x > 0$**.**
Essendo la somma di due funzioni crescenti, è monotona crescente, quindi invertibile.
La funzione inversa non è esprimibile elementarmente; tuttavia, è richiesto di calcolare
la derivata di detta funzione inversa, in corrispondenza del punto 2.

RISOLUZIONE

La formula da utilizzare è $F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$: basta interpretarla correttamente, tenendo presente che

- F ed f sono funzioni inverse l'una dell'altra,
- ed x, y sono due punti che si corrispondono.

Per determinare, come è richiesto, la derivata della funzione inversa F nel punto 2,
dovremo innanzitutto trovare a quale valore di x corrisponde, attraverso la funz. diretta f, il valore $y = 2$.
Insomma, dovremo cercare per quale x si ha $2x^2 + \ln x = 2$;
l'equazione si risolve per tentativi e si trova facilmente $x = 1$.

Allora: $\boxed{F'(2)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left[4x + \frac{1}{x}\right]_{x=1}} = \boxed{\frac{1}{5}}$

Le derivate delle funzioni goniometriche inverse

Come applicazione importante, siamo ora in grado di calcolare le derivate delle funz. goniometriche inverse $arc\,sen\,x, \quad arc\cos x, \quad arc\,tg\,x$.

Cominciamo dalla prima.
Consideriamo

$y = arc\,sen\,x = f(x)$ come funzione diretta (infatti è QUESTA la funzione che innanzitutto ci interessa ora),
$x = sen\,y = F(y)$ come la rispettiva funzione inversa.

Essendo, per il teorema appena stabilito, $F'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, avremo

$$f'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(arc\,sen\,x)} \overset{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

NOTA $\cos y = \cos(arc\,sen\,x)$.
Ma l'arco il cui seno è x ha come coseno $\sqrt{1-x^2}$
(l'assenza del $\pm$ è dovuta al fatto che la scrittura $arc\,sen\,x$ indica sempre un arco compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, quindi con coseno positivo).

Abbiamo dunque dimostrato che è

$$D(arc\,sen\,x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Con procedimenti dimostrativi analoghi si può provare (fallo anche tu come esercizio!) che è

$$D(arc\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(arc\,tg\,x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad D(arc\,cotg\,x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ESEMPIO **Se è $y = arc\,tg\,\dfrac{x^2}{x+1}$, calcolare y'.**

$$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{1}{1+\dfrac{x^4}{x^2+2x+1}} \cdot \frac{2x\cdot(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{x^4+x^2+2x+1}{x^2+2x+1}} \cdot \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x^2+2x+1}}{x^4+x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{\cancel{(x+1)^2}} = \frac{x(x+2)}{x^4+x^2+2x+1}$$

ESERCIZIO SVOLTO **Dalla formula per la derivazione dell'esponenziale: $De^x = e^x$, dedurre quella per la derivazione del logaritmo.**

Prendiamo come funzione diretta $y = e^x \; (= f(x))$. *Invertendo, si ha* $x = \ln y = f^{-1}(y) = F(y)$.

Ora, $F'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{e^{\ln y}} = \dfrac{1}{y}$. *Insomma,* $D(\ln y) = \dfrac{1}{y}$ *come era richiesto di ottenere.*

NOTA.
Si poteva anche assumere il logaritmo come funzione diretta, e l'esponenziale come la rispettiva inversa (in questo modo d'altronde ci eravamo comportati nel corso della dimostrazione del Teorema):
si sarebbe ottenuta la stessa relazione, ma, come è più consueto, con x al posto di y: $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$.

D'altronde, dire che $D(\ln y) = \dfrac{1}{y} \quad \forall y$ equivale in tutto e per tutto ad affermare che $D(\ln x) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x$.

ESERCIZI

Determina le derivate delle funzioni seguenti: $a)\; y = arc\,tg\,x^2 \qquad b)\; y = (arc\,tg\,x)^2 \qquad c)\; y = arc\,sen(2x-1)$

RISPOSTE: $a)\; y' = \dfrac{2x}{1+x^4} \qquad b)\; y' = \dfrac{2x}{1+x^2} arc\,tg\,x \qquad c)\; y' = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

11) LA FUNZIONE DERIVATA E LE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE CONCAVITA' E CONVESSITA' DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile su di un insieme E,
possiamo pensare alla sua funzione derivata $f'(x)$ come ad una nuova funzione
che, eventualmente, potrà essere a sua volta derivabile, magari soltanto su di un sottoinsieme di E .

La derivata della derivata prima si chiama "derivata seconda" e si indica con uno dei simboli:

$f''(x),\quad y'',\quad D^2 f(x),\quad D^2 y,\quad \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ (leggi: derivata seconda di y fatta rispetto a x due volte)

A sua volta, la derivata seconda $f''(x)$, vista come funzione, potrà eventualmente essere derivabile
e in tal caso si parlerà di **derivata terza**; e così di seguito con la **derivata quarta**, la **derivata quinta**, ecc.

ESEMPIO 1: $\quad y = \ln x \quad y' = \dfrac{1}{x} \quad y'' = -\dfrac{1}{x^2} \quad y''' = \dfrac{2}{x^3} \quad y^{IV} = -\dfrac{6}{x^4} \quad y^{V} = \dfrac{24}{x^5} \quad \ldots$

per cui avremo, ad es.: $\; y(1) = 0,\;\; y'(1) = 1,\;\; y''(1) = -1,\;\; y'''(1) = 2,\;\; y^{IV}(1) = -6,\;\; y^{(V)}(1) = 24,\;\; \ldots$

ESEMPIO 2: $\quad f(x) = x^4 - x^3 \quad f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = 12x^2 - 6x \quad f'''(x) = 24x - 6$

$f^{IV}(x) = 24 \quad f^{V}(x) = 0 \quad f^{VI}(x) = 0 \quad f^{VII}(x) = 0 \quad \ldots$ *insomma,* $f^{(k)}(x) = 0$ *per ogni* $k > 4$

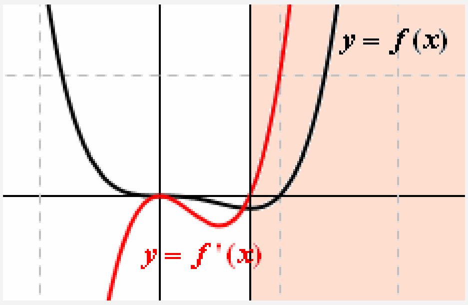
Il polinomio di 4° grado considerato ha tutte le derivate di ordine superiore al 4° uguali a 0.
In generale, preso un qualsivoglia polinomio di grado n,
si vede che, ad ogni derivazione, esso si abbassa di un grado, perciò avrà
come derivata di n-esimo ordine una costante, e tutte le derivate di ordine maggiore di n nulle.

Nella figura qui a fianco sono rappresentate
la nostra funzione $f(x) = x^4 - x^3$
e la sua DERIVATA PRIMA $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$.

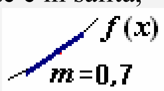
Laddove la derivata prima è positiva (risp.: negativa),
la retta tangente al grafico della $f(x)$ è in salita (risp.: discesa)
e quindi la $f(x)$ ha un andamento crescente (risp.: decrescente)

♥ ***derivata PRIMA positiva → funzione crescente ↗***
derivata PRIMA negativa → funzione decrescente ↘

Figura:
a destra dell'ascissa $x = 3/4$ la f' diventa positiva …
… e simultaneamente la f diventa crescente ↗.
Invece a sinistra dell'ascissa $x = 3/4$ la f' è negativa …
… e simultaneamente la f è decrescente ↘



$f' > 0$ significa che il coeff. angolare della tangente al grafico della f è >0, quindi che la retta tangente è in salita, quindi che la stessa f è CRESCENTE ↗

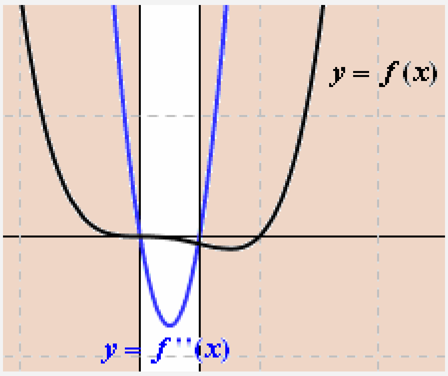


Nella seconda figura sono rappresentate
la nostra funzione $f(x) = x^4 - x^3$
e la sua DERIVATA SECONDA $f''(x) = 12x^2 - 6x$.

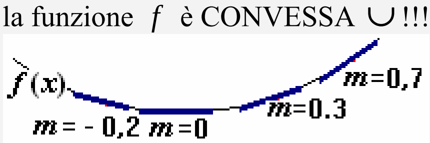
La derivata seconda è la derivata della derivata prima;
allora, laddove la derivata seconda è positiva (risp.: negativa),
la derivata prima è crescente (risp.: decrescente),
e dunque il coefficiente angolare (= inclinazione!)
della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$
cresce (risp.: decresce), al crescere dell'ascissa
… ma ciò comporta che la forma del grafico della $f(x)$
sia convessa ∪ (risp.: concava ∩)

♥ ***derivata SECONDA positiva → funzione convessa ∪***
derivata SECONDA negativa → funzione concava ∩

Figura:
a sinistra dell'ascissa 0, e a destra dell'ascissa $1/2$,
la f'' è positiva … e simultaneamente la f è convessa ∪
Invece fra l'ascissa 0 e l'ascissa $1/2$
la f'' è negativa … e simultaneamente la f è concava ∩



$f'' > 0$ significa f' crescente,
quindi significa che spostando l'occhio
da sinistra a destra …
… il coefficiente angolare cresce,
l'inclinazione cresce,
la funzione f è CONVESSA ∪ !!!



ESERCIZI

ESEMPIO SVOLTO. Studia la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, determinandone:

a) il dominio;

b) le intersezioni con gli assi;

c) la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);

d) i limiti ai confini del dominio

e) la derivata prima $f'(x)$ e
i valori di x per i quali questa si annulla (equazione $f'(x) = 0$)
nonché gli intervalli in cui è positiva (disequazione $f'(x) > 0$)

f) la derivata seconda $f''(x)$ e gli intervalli in cui questa è positiva (disequazione $f''(x) > 0$)

Tenendo presente che ***derivata PRIMA positiva → funzione crescente*** ↗
derivata PRIMA negativa → funzione decrescente ↘
derivata SECONDA positiva → funzione convessa $\cup$
derivata SECONDA negativa → funzione concava $\cap$

traccia il grafico della funzione considerata.

SVOLGIMENTO

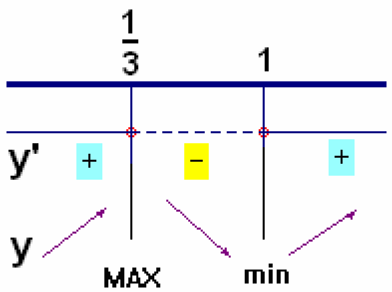
a) Il dominio è tutto $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;

b) Intersezione con l'asse y: pongo $x = 0$ e ottengo $y = 0$; punto $(0,0)$
Intersezione con l'asse x: pongo $y = 0$ e ottengo l'equazione
$x^3 - 2x^2 + x = 0;\ \ x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0;\ \ x(x-1)^2 = 0;\ \ x = 0 \vee x = 1$; punti $(0,0)$ e $(1,0)$

c) Positività: imposto la disequazione $f(x) > 0$
$x^3 - 2x^2 + x > 0;\ \ x\left(x^2 - 2x + 1\right) > 0;\ \ x(x-1)^2 > 0;\ \ x > 0 \text{ } ma \text{ } x \neq 1$

d) Limiti ai confini del dominio: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = -\infty,\ \ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = +\infty$

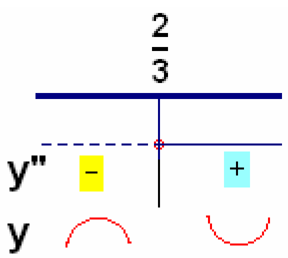
e) Derivata prima: $y' = 3x^2 - 4x + 1$
Valori di x per i quali la derivata prima si annulla: $3x^2 - 4x^2 + 1 = 0 \quad x = \frac{1}{3} \vee x = 1$)
Intervalli in cui la derivata prima è positiva: $3x^2 - 4x^2 + 1 > 0 \quad x < \frac{1}{3} \vee x > 1$



$x = \frac{1}{3} \to y = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ MAX$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$

$x = 1 \to y = 0$ min(1, 0)

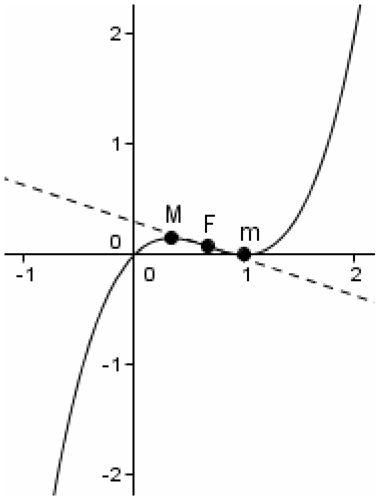
f) Derivata seconda: $y'' = 6x - 4$
i valori di x per i quali la derivata seconda è positiva: $6x - 4 > 0 \quad x > 2/3$



$x = \frac{2}{3} \to y = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ FLEX$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$

Nel punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$ la funzione passa da concava $\cap$ a convessa $\cup$:
di dice che il punto è di "FLESSO". In un punto di flesso il grafico passa da una parte all'altra rispetto alla retta tangente nel punto.
In questo caso la retta tangente nel flesso ha coefficiente angolare
$y'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$

Ed ecco il grafico!



ESERCIZI DA SVOLGERE

Per ciascuna delle seguenti funzioni, determina:

a) il dominio;

b) le intersezioni con gli assi;

c) la "positività"

d) i limiti ai confini del dominio

e) i punti di massimo, minimo e flesso tramite lo studio delle derivate prima e seconda

Controlla infine le tue conclusioni tramite il freeware GeoGebra.

1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 6$

2) $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x$

3) $y = x^4 - 6x^2 - 40$

4) $y = x^2 - \dfrac{16}{x}$

5) $y = xe^x$

6) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ("*seno iperbolico*")

7) $y = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$

8) $y = x - \ln x$

9) $y = x^2 - 4\ln x^2$

10) $y = 1 - 2 sen\, x \cos x \; \left(su \; [0,\, 2\pi] \right)$

11) $y = e^{-x} sen\, x$

Questi esercizi sono tratti dal libro "public domain"

THE CALCULUS,
di Ellery Williams Davis
e William Charles Brenke,
New York 1924

RISPOSTE

1) *Max con* $x = -1$, *min con* $x = 5$, *flesso con* $x = 2$

2) *Max con* $x = -11/6$, *min con* $x = 5/6$, *flesso con* $x = -1/2$

3) *Max con* $x = 0$, *min con* $x = \pm\sqrt{3}$, *flessi con* $x = \pm 1$

4) *nessun massimo, min con* $x = -2$, *flesso con* $x = 2\sqrt[3]{2}$

5) *nessun massimo, min con* $x = -1$, *flesso con* $x = -2$

6) *nessun massimo, nessun minimo, flesso con* $x = 0$

7) *Max con* $x = 1$, *nessun minimo, flesso con* $x = 2$

8) *nessun massimo, min con* $x = 1$, *nessun flesso*

9) *nessun massimo, min con* $x = \pm 2$, *nessun flesso*

10) *Max con* $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ x = \dfrac{7}{4}\pi$, *min con* $x = \dfrac{\pi}{4},\ x = \dfrac{5}{4}\pi$, *flessi con* $x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3}{2}\pi$

11) *Max con* $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, *min con* $x = \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi$, *flessi con* $x = k\pi$