2) DERIVABILITA' E CONTINUITA'

TEOREMA: se una funzione è derivabile in un punto, allora è continua in quel punto.

Schematicamente: f *derivabile in* $x_0 \to f$ *continua in* x_0

(ho preferito usare qui il simbolo x_0 al posto di x per render meglio l'idea di un'ascissa FISSATA. In questo paragrafo il simbolo x ritorna invece ad indicare un'ascissa VARIABILE).

Ipotesi: esiste ed è *finito* il $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Tesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ o, in alternativa, $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Dimostrazione

L'ipotesi è che

esista finito il $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Poniamo dunque $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h)$

e avremo che $\varepsilon(h) \to 0$ quando $h \to 0$.

Adesso possiamo scrivere:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varepsilon(h)$$
$$f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) = h\cdot\varepsilon(h)$$
$$f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$$
$$f(x_0+h) = f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\varepsilon(h)\right]$$

Dall'ultima uguaglianza,
passando al limite per $h \to 0$, otteniamo:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left\{f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\varepsilon(h)\right]\right\} = f(x_0)$$

C.V.D.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:
il teorema non è invertibile, cioè non è vero che la continuità in un punto implichi per forza la derivabilità in quel punto.

Due controesempi:

- $y = \sqrt[3]{x}$
  è continua nell'origine ma non è ivi derivabile, perché "ha derivata infinita"
- $y = |x-3|$
  non è derivabile nel punto $x=3$ perché il rapporto incrementale in $x=3$ tende a due limiti distinti a seconda che l'incremento tenda a 0^+ o a 0^-.

Insomma:
la continuità in un punto è condizione NECESSARIA, ma NON SUFFICIENTE, per la derivabilità in quel punto.

3) INFINITESIMI, INFINITI; "SCRITTURA FUORI DAL SEGNO DI LIMITE"

- Della quantità $\varepsilon(h)$, introdotta nel Teorema precedente, si può dire che è "un infinitesimo".
  In Analisi matematica il termine "**infinitesimo**" viene spesso utilizzato per indicare "**una funzione o quantità che tende a zero, nel contesto di cui ci si sta occupando**". Altri esempi:
  - la funzione $y = \frac{1}{x^2}$ è un infinitesimo per $x \to \infty$
  - $y = sen\,x$ e $y = 1-cos\,x$ sono infinitesimi per $x \to 0$
  - $e^{1/x}$ è un infinitesimo per $x \to 0^-$
- Analogamente, viene usata la parola "**infinito**" per indicare **una funzione o quantità che tende all'infinito, nel contesto di cui ci si sta occupando**; es.
  - $y = tg\,x$ è un infinito per $x \to \pi/2$
  - $ln\,x$ è un infinito per $x \to +\infty$
  - $\frac{1}{x-2}$ è un infinito per $x \to 2$
  - $e^{1/x}$ è un infinito per $x \to 0^+$
- Per "**scrittura fuori dal segno di limite**" si intende **la possibilità, nel caso si abbia** $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$**, di esprimere la funzione come somma del limite più un infinitesimo**:

  $\boxed{f(x) = \ell + \varepsilon(x)}$ **essendo** $\varepsilon(x)$ **un infinitesimo quando** $x \to \ell$**.**

  In effetti, posto $\varepsilon(x) = f(x)-\ell$, si ha banalmente $f(x) = \ell + (f(x)-\ell) = \ell + \varepsilon(x)$ e $\varepsilon(x) \to 0$
  (in pratica, la quantità $\varepsilon(x)$ che compare nella scrittura non è altro che la differenza $f(x)-\ell$).