6) DERIVATE DELLE FUNZIONI FONDAMENTALI

$\boxed{y=c \to y'=0}$ **“La derivata di una costante è zero”**

Dimostrazione

$$f(x)=c \quad (costante) \qquad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\overset{NOTA}{=}\lim_{h\to 0}0=0$$

NOTA La frazione 0/h ha senso (e vale 0) solo per $h\neq 0$*, ma un limite non dipende in alcun modo da ciò che succede alla funzione nell’ascissa alla quale si fa tendere la variabile.*

$\boxed{y=x \to y'=1}$ **“La derivata della funzione identica $y=x$ è 1”**

Dimostrazione

$$f(x)=x \qquad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$$\boxed{y=x^n \to y'=nx^{n-1}, \quad con\ n=2,3,4,\dots}$$

Formula per la derivata di una potenza con esponente 2,3,4…
(CHE SI ESTENDERA’ POI A QUALSIASI ESPONENTE REALE)

Dimostrazione

$y=f(x)=x^n$,
$con\ n=2,3,4\dots$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\overset{\text{NOTA 1}}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h\cancel{-x})\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\dots+x^{n-1}\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\dots+x^{n-1}\right]\overset{\text{NOTA 2}}{=}nx^{n-1}$$

NOTA 1: Si può dimostrare che vale, sia per n pari che per n dispari, la formula

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

NOTA 2: Infatti entro la quadra abbiamo n addendi (per contarli, pensa che gli esponenti di x vanno da 0 a $n-1$*, quindi i termini in totale sono n), e ciascun addendo tende a* x^{n-1}

Osserviamo che la validità della formula si può pensare estesa anche al caso n=1 (funzione identica *y=x*) che era stato trattato precedentemente in modo autonomo.
E la formula “funziona”, volendo, anche nel caso n=0 (funzione costante).
Dimostreremo più avanti che la formula per la derivazione di una potenza rimane la stessa che abbiamo scritto sopra addirittura PER QUALSIASI ESPONENTE REALE (positivo, negativo o nullo), cioè che

$$\boxed{y=x^{\alpha} \to y'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad \boxed{\forall \alpha\in\mathbb{R}}}.$$

Ti suggerisco di fissare in mente, e utilizzare fin d’ora se sarà il caso, questa importantissima regola.

Per la dimostrazione della formula avremmo potuto anche utilizzare, al posto della scomposizione in fattori, lo sviluppo del “binomio di Newton”:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\dots+nxh^{n-1}+h^n\cancel{-x^n}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\dots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}\overset{\text{NOTA 3}}{=}nx^{n-1}$$

NOTA 3: Infatti entro parentesi quadra tutti gli addendi, tranne il primo, contengono come fattore una potenza di h con esponente positivo e quindi tendono a zero al tendere a zero di h.

$$\boxed{y=\sqrt{x}\rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Dimostrazione:

$$y=f(x)=\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Osserviamo che la formula appena stabilita "va d'accordo" con quella per la derivazione di una potenza con esponente intero (e di cui avevamo anticipato la validità per qualsiasi esponente reale). Infatti, scrivendo $y=\sqrt{x}$ come $y=x^{1/2}$, se si applica formalmente la regola per la derivazione di una potenza, stabilita nel caso che l'esponente fosse intero: $Dx^n=nx^{n-1}$, si ottiene

$$y'=Dx^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ *ossia il risultato che abbiamo appena dedotto.*

$\boxed{y=sen\,x\rightarrow y'=cos\,x}$ *già dimostrata in precedenza*

$\boxed{y=cos\,x\rightarrow y'=-sen\,x}$ *la cui dimostrazione è lasciata al lettore*

$\boxed{y=\log_a x\rightarrow y'=\frac{1}{x}\log_a e}$ *da cui, in particolare, segue la formula di più frequente applicazione*:

$$\boxed{y=\ln x\rightarrow y'=\frac{1}{x}}$$

Dimostrazione

$f(x)=\log_a x$

$$rapp.\ incrementale=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=$$

$$=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}=\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}\cdot\frac{1}{x}}=\log_a\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}\right]^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}$$

e poiché, al tendere di h a 0, e quindi per $\frac{h}{x}=z$ *che tende a 0, si ha* $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}=(1+z)^{\frac{1}{z}}\rightarrow e$, *otteniamo*

$$derivata=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e,\quad C.V.D.$$

$\boxed{y=a^x\rightarrow y'=a^x\ln a}$ *da cui, in particolare, segue la formula di più frequente applicazione, ossia*

$$\boxed{y=e^x\rightarrow y'=e^x}$$

Dim.: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}$$

ed essendo noto che, al tendere di h a 0, $\frac{a^h-1}{h}\rightarrow\ln a$, *avremo* $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\ln a$, *C.V.D.*