8) ESERCIZI “TIPICI” CON APPLICAZIONE DELLA DERIVATA; PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO DI UNA FUNZIONE

1) Traccia il “GRAFICO PROBABILE” della funzione $y = \ln x - 2x$
determinandone poi anche il PUNTO DI MASSIMO.

IL “GRAFICO PROBABILE” DI UNA FUNZIONE

E’ quello che si può tracciare dopo aver determinato:

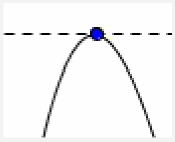
a) il dominio;
b) le intersezioni con gli assi;
c) la “positività”, cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);
d) i limiti ai confini del dominio.

PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO “LOCALE” DI UNA FUNZIONE

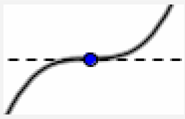
In corrispondenza di questi punti,
la retta tangente al grafico (qualora esista)
è orizzontale, quindi ha coefficiente angolare uguale a 0.

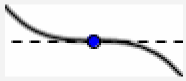
Perciò per determinarli:
a) si calcolerà la derivata $f'(x)$ della funzione
b) poi “la si porrà uguale a 0”, ossia si imposterà l’equazione $f'(x) = 0$.

Le soluzioni di tale equazione saranno
quei valori di x in corrispondenza dei quali il grafico
presenta una delle situazioni illustrate in figura.


MASSIMO


MINIMO


FLESSO ORIZZONTALE ASCENDENTE


FLESSO ORIZZONTALE DISCENDENTE

SVOLGIMENTO

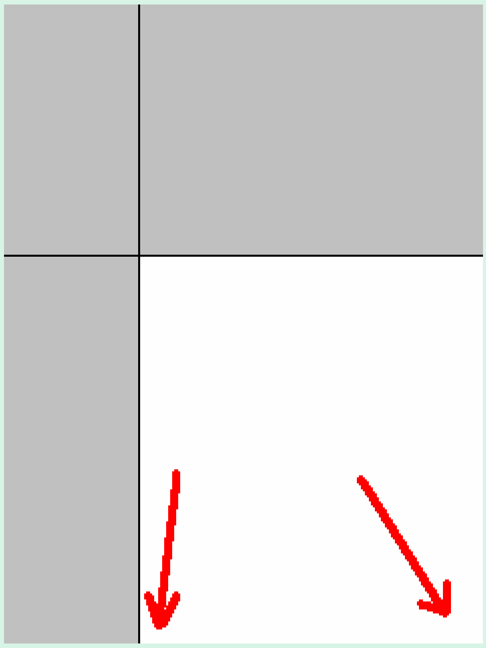
a) Il dominio della funzione $y = \ln x - 2x$ è (condizione di esistenza del logaritmo) $x > 0$.

b) Intersezione con l’asse y:
non esiste, perché non si può dare a x il valore 0!

Intersezioni con l’asse x:
pongo $y = 0$, imposto cioè l’equazione $\ln x - 2x = 0$.
Questa equazione non è risolubile con metodi elementari;
però portandola sotto la forma $\ln x = 2x$
e risolvendola per via grafica, si vede che è impossibile.
Pertanto il nostro grafico non interseca neppure l’asse x.

c) Positività: mi chiedo per quali valori di x si ha $\ln x - 2x > 0$
La disequazione non è risolubile con metodi elementari;
portandola sotto la forma $\ln x > 2x$
e risolvendola per via grafica, si vede che è impossibile.
Pertanto il può mai risultare $\ln x - 2x > 0$,
il grafico delle funzione starà sempre
al di sotto dell’asse orizzontale.

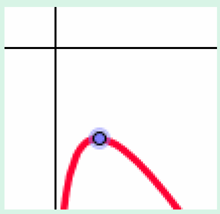
d) Limiti ai confini del dominio: $\lim_{x \to 0+} (\ln x - 2x) = -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} (\ln x - 2x) = -\infty$



Da quanto precede si trae che deve esserci per forza un punto di massimo!

La derivata della funzione è $y' = \frac{1}{x} - 2$ e uguagliandola a 0 si trova $x = \frac{1}{2}$;

perciò il massimo ha coordinate $M\left(\frac{1}{2}, -(1 + \ln 2)\right)$



2) Considera la funzione $y = f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ e tracciane il "grafico probabile".

Constaterai che la funzione deve presentare sia un minimo che un massimo: determinane le coordinate.

3) a) Traccia il "grafico probabile" della funzione $g(x) = x^3 - x$,
b) poi determina le coordinate del suo minimo e del suo massimo.

4) Stabilisci per quale valore del parametro a la curva grafico della funzione $y = f(x) = x^3 + ax^2 + x$ ha, nel punto di ascissa 1, retta tangente orizzontale.
Stabilisci poi la natura di questo punto:
è di massimo relativo? Di minimo relativo? Né l'uno né l'altro?

5) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = x^4 - 5x - 1$ nel suo punto di ascissa 2.

L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE
AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE IN UN SUO PUNTO:

La Geometria Analitica insegna che l'equazione della retta di coeff. angolare *m*, passante per (x_0, y_0) è:

$$r: \; y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ora, poiché la derivata di una funzione in un punto fornisce il coefficiente angolare
della retta tangente al grafico della funzione in quel punto,
l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 è:

$$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

6) Per quali valori di x la retta tangente al grafico della funzione $y = x^3 - x^2$ è inclinata di $+45°$?

7) Determina le equazioni delle rette tangenti alla curva $y = x^3 - x$, condotte dal punto $A(2, -2)$.
SUGGERIMENTO:
si potrebbe provare a scrivere l'equazione della generica retta per A: $y + 2 = m(x-2)$,
poi porla a sistema con l'equazione della curva allo scopo di cercare i valori di m
per i quali retta e curva hanno un'intersezione "doppia"…
… ma la ricerca di tali valori è problematica, poiché l'equazione risolvente del sistema
è di terzo grado e non di secondo!
Allora cambieremo strategia.
Consideriamo il generico punto $P(t, f(t))$ della curva,
scriviamo l'equazione della retta tangente alla curva in P (in questa equazione t farà da parametro),
e imponiamo infine il passaggio di tale retta per A …

RISPOSTE

2) Dominio: tutto $\mathbb{R}$; intersezioni con gli assi: $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(1, 0)$; $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0$.

Da queste informazioni si trae che devono per forza esserci sia un punto di minimo che uno di massimo.

La derivata della funzione data è $y' = -\frac{x^2 - 2x - 3}{\left(x^2+3\right)^2}$; minimo in $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, massimo in $\left(3, \frac{1}{6}\right)$

3) max in $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, min in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

4) $a = -2$; minimo

5) $t: \; y = 27x - 49$

6) $x = -\frac{1}{3}, \; x = 1$

7) $P\left(t, t^3 - t\right)$ e l'equazione della retta tangente in P è $y - \left(t^3 - t\right) = \left(3t^2 - 1\right)(x - t)$
Le due tangenti passanti per A hanno equazioni $y = -x$ e $y = 26x - 54$