9) DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

La derivata di una funzione composta (= funzione di funzione) si ottiene (dim. alle pagine 20 e 21):

a) derivando la funzione principale (= quella che si applica per ultima) "rispetto al suo argomento z"
(voglio dire: **facendo finta che il suo argomento** non sia a sua volta una funzione,
ma **sia una variabile indipendente** z; al posto di z, però, va sempre scritta
l'espressione che nella nostra mente abbiamo sostituito con z)

b) poi moltiplicando ciò che si è ottenuto per la derivata dell'argomento z.

*Il procedimento a)+b) va eventualmente iterato per gli argomenti più interni,
se si ha una funzione "composta più volte"*

… Capito? 

Coraggio! Dal punto di vista pratico, vedrai che non è poi così terribile.
Gli ESEMPI qui sotto riportati faranno chiarezza.

$$\boldsymbol{y = sen^3 x = (sen\,x)^3} \qquad x \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\,x \xrightarrow{(\bullet)^3} \boxed{\overbrace{(sen\,x)}^{z}{}^3}$$

ULTIMA funzione applicata: il "CUBO"

In generale:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = [f(x)]^\alpha \\ y' = \alpha\,[f(x)]^{\alpha-1}\cdot f'(x) \end{array}}$$

Si deriva **PER PRIMA la funzione che è stata applicata PER ULTIMA:** in questo caso, la funzione "cubo".

a) DERIVIAMO dunque z^3, DOVE PERO' il nostro "z" è il blocco "$sen\,x$"; otteniamo $3\cdot z^2$, ossia $3(sen\,x)^2$;

b) POI MOLTIPLICHIAMO per la derivata di $z = sen\,x$, che è $cos\,x$.

In definitiva, la derivata cercata sarà $y' = 3(sen\,x)^2\,cos\,x = 3\,sen^2 x\,cos\,x$

$$y = e^{2x+3} \qquad x \xrightarrow{2(\bullet)+3} 2x+3 \xrightarrow{e^{(\bullet)}} e^{2x+3}$$

$$y' = e^{2x+3}\cdot 2 = 2e^{2x+3}$$

$$x \xrightarrow{f(\bullet)} f(x) \xrightarrow{e^{(\bullet)}} e^{f(x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = e^{f(x)} \\ y' = e^{f(x)}\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = \ln\left(x^2-5x+4\right) \qquad x \xrightarrow{(\bullet)^2-5(\bullet)+4} x^2-5x+4 \xrightarrow{\ln(\bullet)} \ln\left(x^2-5x+4\right)$$

$$y' = \frac{1}{x^2-5x+4}\cdot(2x-5) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4}$$

$$x \xrightarrow{f(\bullet)} f(x) \xrightarrow{\ln(\bullet)} \ln f(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \ln f(x) \\ y' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \end{array}}$$

$$y = sen\,x^3 \qquad x \xrightarrow{(\bullet)^3} x^3 \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\,x^3$$

$$y' = cos\,x^3\cdot 3x^2 = 3x^2 cos\,x^3$$

$$x \xrightarrow{f(\bullet)} f(x) \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\,f(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = sen\,f(x) \\ y' = cos\,f(x)\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = cos\,2x \qquad y' = -sen\,2x\cdot 2 = -2\,sen\,2x$$

$$\boxed{y = cos\,f(x) \quad y' = -sen\,f(x)\cdot f'(x)}$$

$$y = tg\left(x^4+5\right)$$

$$y' = \frac{1}{cos^2\left(x^4+5\right)}\cdot 4x^3 = \left[1+tg^2\left(x^4+5\right)\right]\cdot 4x^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = tg\,f(x) \\ y' = \dfrac{1}{cos^2 f(x)}\cdot f'(x) = \left[1+tg^2 f(x)\right]\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = cotg\,7x$$

$$y' = -\frac{1}{sen^2 7x}\cdot 7 = -\left[1+cotg^2 7x\right]\cdot 7$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = cotg\,f(x) \\ y' = -\dfrac{1}{sen^2 f(x)}\cdot f'(x) = -\left[1+cotg^2 f(x)\right]\cdot f'(x) \end{array}}$$

$$y = a^{cos\,x} \qquad y' = a^{cos\,x}\cdot\ln a\cdot(-sen\,x)$$

$$\boxed{y = a^{f(x)} \quad y' = a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)}$$

$$y = \log_4(3x+2) \qquad y' = \frac{1}{3x+2}\cdot\log_4 e\cdot 3 = \frac{3}{3x+2}\cdot\log_4 e$$

$$\boxed{y = \log_a f(x) \quad y' = \frac{1}{f(x)}\cdot\log_a e\cdot f'(x)}$$

$$y = \frac{1}{sen\,x} = (sen\,x)^{-1} \qquad y' = -1\cdot(sen\,x)^{-2}\cdot cos\,x = -\frac{cos\,x}{sen^2 x}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{f(x)} \quad y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

$$y = \left(1+x^2+x^4\right)^6 \qquad x \xrightarrow{1+(\bullet)^2+(\bullet)^4} 1+x^2+x^4 \xrightarrow{(\bullet)^6} \left(1+x^2+x^4\right)^6 \qquad y' = 6\left(1+x^2+x^4\right)^5\cdot\left(2x+4x^3\right)$$

$y = \ln\, sen\, 5x$ (qui, come poi nell'esempio successivo, abbiamo una composizione di TRE funzioni!)

$x \xrightarrow{5(\bullet)} 5x \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\,5x \xrightarrow{\ln(\bullet)} \ln\, sen\, 5x$ DUNQUE $y' = \frac{1}{sen\,5x}\cdot cos\,5x \cdot 5 = \frac{5cos\,5x}{sen\,5x} = 5cotg\,5x$

In generale, quando le funzioni sono tre:

$$y = h\big(g(f(x))\big)$$

$$x \xrightarrow{f(\bullet)} f(x) \xrightarrow{g(\bullet)} g(f(x)) \xrightarrow{h(\bullet)} h\big(g(f(x))\big)$$

Se $y = h\big(g(f(x))\big)$ allora $y' = h'\big(g(f(x))\big)\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$

Il tutto si può scrivere in modo **efficacissimo** con la **notazione di Leibniz**:

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg}\cdot\frac{dg}{df}\cdot\frac{df}{dx}}$$

$y = sen\, e^{x^2}$ $\quad x \xrightarrow{(\bullet)^2} x^2 \xrightarrow{e^{(\bullet)}} e^{x^2} \xrightarrow{sen(\bullet)} sen\, e^{x^2}$ DUNQUE $y' = cos\, e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x = 2x\, e^{x^2} cos\, e^{x^2}$

Derivazione di una potenza ad esponente qualsiasi

Dal teorema segue un risultato molto importante che avevamo già anticipato senza dimostrazione, ossia:

la formula per la derivazione di una potenza: $\boxed{y = x^n \to y' = nx^{n-1}}$

già provata nel caso che l'esponente fosse un numero naturale: $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
si estende a QUALUNQUE esponente reale (positivo, negativo, frazionario, irrazionale):

$$\boxed{y = x^\alpha \to y' = \alpha\, x^{\alpha-1},\quad \boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}}}$$

Basta scrivere la potenza sotto forma di esponenziale di un logaritmo: $y = x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$

dopodichè si avrà: $D\left(x^\alpha\right) = D\left(e^{\alpha \ln x}\right) = e^{\alpha \ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$, C.V.D..

Ad esempio: $y = \sqrt[5]{sen\,x} = (sen\,x)^{\frac{1}{5}} \to y' = \frac{1}{5}(sen\,x)^{-\frac{4}{5}}\cdot cos\,x = \frac{cos\,x}{5\sqrt[5]{(sen\,x)^4}} = \frac{cos\,x}{5\sqrt[5]{sen^4 x}}$

Derivazione di una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$

Questo accorgimento di esprimere la funzione data come esponenziale di un logaritmo si applica anche per la derivazione di una funzione della forma $[f(x)]^{g(x)}$. Si procede come segue:

$$D[f(x)]^{g(x)} = D\, e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = D\, e^{g(x)\ln f(x)} =$$
$$= e^{g(x)\ln f(x)}\cdot\left\{g'(x)\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right\} = [f(x)]^{g(x)}\cdot\left\{g'(x)\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

Niente paura, però: la formulaccia precedente non è assolutamente da imparare a memoria!
Si tratta invece di applicare lo stesso procedimento in tutti i casi particolari di questo tipo.

Esempio: se devo derivare la funzione x^x, mi basta solo
ricordare di trasformarla in esponenziale-di-un-logaritmo: il resto verrà da sé!

Ad esempio: $D\,x^x = De^{\ln x^x} = De^{x\ln x} = e^{x\ln x}\cdot\left\{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right\} = x^x(\ln x + 1)$

La derivata del logaritmo di un valore assoluto

La derivata della funzione $y = \ln|x|$ è $y = \frac{1}{x}$ SU TUTTO $\mathbb{R}$, cioè sia con $x > 0$ che con $x < 0$

Si tratta ancora di una conseguenza del teorema sulla derivazione di una funzione composta:

con $x > 0$, si ha $y = \ln|x| = \ln x \to y' = \frac{1}{x}$, e con $x < 0$ si ha $y = \ln|x| = \ln(-x) \to y' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

Ad esempio: $D\ln\left|x^2 - 7\right| = \frac{1}{x^2-7}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-7}$ … e questo vale per *tutti* i valori di x.

Gli ESERCIZI sulla derivazione delle funzioni composte si trovano alla successiva pagina 20,
mentre la DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA è riportata alle pagine 21 e 22.

ESERCIZI

Derivare le seguenti funzioni:

1) $y = sen\,2x$ 2) $y = sen^2 x$ 3) $y = e^{sen\,x}$ 4) $y = e^{x^2}$ 5) $y = \ln^2 x$ 6) $y = \ln x^2$

7) $y = \ln 2x$ 8) $y = \left(x^2+2x\right)^8$ 9) $y = \sqrt{sen\,x+2}$ 10) $y = x^2 + sen\frac{1}{x}$ 11) $y = e^{1/x}$ 12) $y = \frac{1}{e^x}$

13) $y = sen\,\ln x$ 14) $y = \ln sen\,x$ 15) $y = \ln\ln x$ 16) $y = \left(sen\,x - cos\,x\right)^2$

17) $y = cos\,e^{2x}$ 18) $y = \ln\left(sen3x+2\right)$ 19) $e^{sen^2 x}$ 20) $y = \ln\ln\ln x$

21) $y = tg\,2x$ 22) $y = tg\,x^2$ 23) $y = tg^2 x$ 24) $y = 5/tg\,3x$

25) $\ln\left(x^2+1\right)$ 26) $y = 3e^{x^2-4} - 5$ 27) $y = \ln\left(3sen^2 x + 2\right)$ 28) $y = e^{2x} + cos\,2x$

29) $y = x + e^{sen\,x\,cos\,x}$ 30) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 31) $y = \frac{sen^2 x}{x^2}$ 32) $y = \frac{1}{sen^4 3x}$

33) $y = \sqrt[3]{(4x-5)^2}$ 34) $y = \log_2 tg\,x$ 35) $y = \sqrt{sen\sqrt{x}}$ 36) $y = \frac{e^{x^2}}{x^2-4x+1}$

37) $y = \sqrt[5]{\ln^4 x}$ 38) $y = \sqrt[3]{e^{2x}-x}$ 39) $y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ 40) $y = \sqrt[4]{cos^3 x^2}$

41) $y = \left(sen\,x\right)^x$ 42) $y = \left(e^x+1\right)^{sen\,x}$ 43) $y = \ln cos\,x$ 44) $y = \ln\left|cos\,x\right|$

RISULTATI

1) $y' = 2\,cos\,2x$ 2) $y' = 2\,sen\,x\,cos\,x$ 3) $y' = cos\,x \cdot e^{sen\,x}$ 4) $y' = 2x\,e^{x^2}$

5) $y' = \frac{2\ln x}{x}$ 6) $y' = \frac{2}{x}$ 7) $y' = \frac{1}{x}$ 8) $y' = 8\left(x^2+2x\right)^7\left(2x+2\right) = 16x^7\left(x+2\right)^7\left(x+1\right)$

9) $y' = \frac{cos\,x}{2\sqrt{sen\,x+2}}$ 10) $y' = 2x - \frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x}$ 11) $y' = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}$ 12) $y' = -\frac{1}{e^x}$

13) $y' = \frac{cos\,\ln x}{x}$ 14) $y' = \frac{cos\,x}{sen\,x} = cotg\,x$ 15) $y' = \frac{1}{x\ln x}$ 16) $y' = 2\left(sen\,x - cos\,x\right)\left(cos\,x + sen\,x\right)$

17) $y' = -2e^{2x} sen\,e^{2x}$ 18) $y' = \frac{3\,cos\,3x}{sen3x+2}$ 19) $y' = 2\,sen\,x\,cos\,x \cdot e^{sen^2 x}$ 20) $y' = \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$

21) $y' = 2\left(1+tg^2 2x\right)$ 22) $y' = 2x\left(1+tg^2 x^2\right)$ 23) $y' = 2tg\,x\left(1+tg^2 x\right)$ 24) $y' = -\frac{15\left(1+tg^2 3x\right)}{tg^2 3x}$

25) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ 26) $y' = 6x\,e^{x^2-4}$ 27) $y' = \frac{6\,sen\,x\,cos\,x}{3sen^2 x+2}$ 28) $y' = 2e^{2x} - 2sen\,2x$

29) $y' = 1 + \left(cos^2 x - sen^2 x\right)e^{sen\,x\,cos\,x}$ 30) $y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ 31) $y' = \frac{2\,sen\,x\left(x\,cos\,x - sen\,x\right)}{x^3}$

32) $y' = -\frac{12\,cos\,3x}{sen^5 3x}$ 33) $y' = \frac{8}{3\sqrt[3]{4x-5}}$ 34) $y' = \frac{1+tg^2 x}{tg\,x}\log_2 e$

35) $y' = \frac{cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\,sen\sqrt{x}}}$ 36) $y' = \frac{2e^{x^2}(x^3-4x^2+2)}{(x^2-4x+1)^2}$ 37) $y' = \frac{4}{5x\sqrt[5]{\ln x}}$

38) $y' = \frac{2e^{2x}-1}{3\sqrt[3]{\left(e^{2x}-x\right)^2}}$ 39) $y' = \frac{1}{2\left(x+1\right)^2}\sqrt[4]{\frac{\left(x+1\right)^3}{\left(x-1\right)^3}} = \frac{1}{2\left(x+1\right)\left(x-1\right)}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$

40) $y' = -\frac{3x\,sen\,x^2}{2\sqrt[4]{cos\,x^2}}$ 41) $y' = \left(sen\,x\right)^x \cdot \left(\ln sen\,x + x \cdot \frac{cos\,x}{sen\,x}\right)$

42) $y' = \left(e^x+1\right)^{sen\,x} \cdot \left\{cos\,x\ln(e^x+1) + sen\,x \cdot \frac{e^x}{e^x+1}\right\}$ 43) $y' = -tg\,x$ 44) $y' = -tg\,x$

DIMOSTRAZIONE del teorema sulla derivata di una funzione composta

Per capire meglio quali sono le diverse quantità in gioco,
pensiamo all'esempio specifico della funzione $y = sen^3 x = (sen\, x)^3$:

si parte da *x*,

a) si passa attraverso un calcolo intermedio applicando a *x* la funzione "*seno*" che fornisce il numero $z = sen\, x$,
b) infine si applica la funzione "*cubo*" a questo numero *z*, ottenendo il valore finale $y = sen^3 x = (sen\, x)^3$.

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{\boldsymbol{sen}(\bullet)} \overbrace{\boldsymbol{sen\,x}}^{\boldsymbol{z}} \xrightarrow{(\bullet)^3} \underbrace{(\overbrace{\boldsymbol{sen\,x}}^{\boldsymbol{z}})^3}_{\boldsymbol{y}} = sen^3 x$$

Siamo d'accordo con il ruolo dei simboli x, z, y ? OK? Possiamo allora partire col caso generale.

Noi vogliamo costruire il rapporto incrementale della funzione composta $y(x)$,
che è poi "$y - che - dipende - da - z - che - dipende - da - x$", ossia $y = y\big(z(x)\big)$.

All'ascissa di partenza x corrisponde il valore z al quale corrisponde poi il valore y.
Se ora noi passiamo da x a $x + \Delta x$,
la quantità intermedia z subisce un incremento Δz che la porta al nuovo valore $z + \Delta z$;
dopodiché, al valore $z + \Delta z$, corrisponderà un determinato valore $y + \Delta y$:

$$\begin{array}{lll} x & \to z & \to y \\ x + \Delta x & \to z + \Delta z & \to y + \Delta y \end{array}$$

Il rapporto incrementale della funzione composta $y = y(x) = y\big(z(x)\big)$ è $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

ma si può scrivere $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$.

Ora facciamo tendere Δx a zero.
Supponiamo che la funzione z sia derivabile in x:
essa sarà allora certamente continua in x per un teorema ben noto e pertanto anche Δz tenderà a 0;
dunque avremo (supponendo altresì che la funzione y sia derivabile in z):

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \to z'(x) \quad \text{e} \quad \frac{\Delta y}{\Delta z} \to y'(z).$$

Resta perciò dimostrato che

$$\boldsymbol{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = \boldsymbol{y'(z) \cdot z'(x)}$$, cioè la tesi.

C'è però un piccolo guaio.
Non sarebbe onesto affermare che questa dimostrazione è del tutto generale e completa:
infatti essa non tiene conto del fatto che Δz si potrebbe eventualmente annullare!!!
Sei d'accordo?
Può anche capitare, per una funzione $z = z(x)$, che,
fissata un'ascissa x e dato a x un incremento Δx, risulti tuttavia $z(x + \Delta x) = z(x)$ e cioè $\Delta z = 0$.
Ma se così fosse, il nostro discorso, che comporta la presenza di Δz a denominatore, crollerebbe.

Caro lettore, se non sei particolarmente interessato ad approfondimenti, accontentati pure di quanto scritto sopra (che costituisce una dimostrazione del teorema nel caso, invero di gran lunga il più frequente,
in cui esiste per lo meno un intorno di *x* nell'ambito del quale, qualunque sia l'incremento che si dà alla *x*,
la quantità $z(x)$ subisce sempre un incremento ***non nullo***).

Se invece desideri la dimostrazione del tutto generale, prosegui la lettura.

*Insieme con la dimostrazione generale, daremo anche l'enunciato astratto del teorema,
che, se badi, fino a questo momento non abbiamo mai formulato, accontentandoci della descrizione
"alla buona" iniziale (quella che aveva tanto angosciato Snoopy) e della rassegna di esempi.*

*Per una dimostrazione completamente generale del teorema sulla derivazione delle funzioni composte,
ritengo preferibile indicare l'ascissa fissata con* x_0 *anziché con x.*

Teorema sulla derivazione di una funzione composta (= funzione di funzione)

$$x \xrightarrow{f} \underbrace{f(x)}_{z} \xrightarrow{g} \underbrace{g\big(f(x)\big)}_{y=F(x)} \qquad x \to F(x) = g\big(f(x)\big)$$

Sia $z = f(x)$ definita su tutto un intorno di x_0 e derivabile in x_0.
Sia $y = g(z)$ definita su tutto un intorno di $z_0 = f(x_0)$ e derivabile in z_0.
Allora la funzione composta $y = F(x) = g\big(f(x)\big)$ è derivabile in x_0 e risulta
$F'(x_0) = g'(z_0) \cdot f'(x_0)$

Dimostrazione

Essendo per ipotesi $g(z)$ derivabile in z_0, si ha $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} = g'(z_0)$

da cui (scrittura fuori dal segno di limite) $\dfrac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} = g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)$ *con* $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ *quando* $\Delta z \to 0$

e quindi vale l'uguaglianza **(1)** $g(z_0+\Delta z)-g(z_0) = \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\Delta z$ *con* $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ *quando* $\Delta z \to 0$.

Bene!
Abbiamo quindi scritto la (1), nella quale compaiono gli incrementi Δz della var. z, calcolati rispetto al punto z_0.
La (1) è stata ricavata partendo da un rapporto incr. con Δz a denominatore, per cui va pensata valida per $\Delta z \neq 0$;
tuttavia, è proprio il caso $\Delta z = 0$ la "pietra dello scandalo" che ci ha costretto a cercare una diversa dimostrazione.
Ora, se, a posteriori, pensiamo alla (1) con $\Delta z = 0$, vediamo che essa,
avendo il primo membro nullo e il secondo membro caratterizzato dalla presenza di un fattore nullo,
continuerebbe ad esser valida se non fosse per il fatto che, in questo caso, la quantità $\varepsilon(\Delta z)$,
che era stata introdotta come differenza fra il rapporto incrementale e la derivata, non avrebbe significato.
Ma noi possiamo attribuire a $\varepsilon(\Delta z)$, nel caso $\Delta z = 0$, un valore convenzionale, ad es. ponendo, per $\Delta z = 0,\ \varepsilon(\Delta z) = 0$.
Facciamo dunque così. In definitiva, la quantità $\varepsilon(\Delta z)$ che compare nella (1) avrà il valore

$$\begin{cases} \varepsilon(\Delta z) = \dfrac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} - g'(z_0) & con\ \Delta z \neq 0; \\ \varepsilon(\Delta z) = 0 & con\ \Delta z = 0 \end{cases}$$

e la (1) risulterà valida anche con $\Delta z = 0$.

La relazione (1) trae la sua verità dal fatto che l'ipotesi afferma la derivabilità di $g(z)$ in z_0.
$g(z)$ è una funzione, definita su tutto un intorno di z_0;
fin qui, NON stiamo ancora riguardando z come variabile che dipende da x, stiamo trattando z
come una variabile indipendente, e indicando con Δz lo scostamento del suo valore dal valore-base z_0.
Fra un attimo riguarderemo invece z come variabile dipendente da x; al variare di x, varierà anche z;
con $x = x_0$, sarà $z = z_0$, e quando x subirà un incremento algebrico Δx diventando $x_0 + \Delta x$,
allora z diventerà $z_0 + \Delta z$, subendo un ben determinato incremento algebrico Δz (dipendente da Δx),
che potrà eventualmente anche essere nullo.
Quindi, nel seguito, il simbolo Δz, prima usato per indicare un generico incremento algebrico $z - z_0$,
passerà ad indicare quel *ben determinato* incremento algebrico, eventualmente anche nullo,
che la $z(x)$ subisce quando da $x = x_0$ si passa a $x = x_0 + \Delta x$.

Dopo questa premessa, andiamo a costruire il rapporto incrementale in x_0 della funzione $F(x)$.

Avendosi
$$\begin{array}{lllll} x_0 & \to & z_0 = f(x_0) & \to & y_0 = g(z_0) = g\big(f(x_0)\big) = F(x_0) \\ x_0+\Delta x & \to & z_0+\Delta z = f(x_0+\Delta x) & \to & y_0+\Delta y = g(z_0+\Delta z) = g\big(f(x_0+\Delta x)\big) = F\big(x_0+\Delta x\big) \end{array}$$

sarà
$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta x} = \frac{\left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right]\Delta z}{\Delta x} =$$
$$= \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right] \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right] \cdot \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

e quindi, facendo tendere Δx a 0, dal momento che quando $\Delta x \to 0$, anche $\Delta z \to 0$ ed $\varepsilon(\Delta z) \to 0$, avremo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[g'(z_0)+\varepsilon(\Delta z)\right] \cdot \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = g'(z_0) f'(x_0), \quad \text{C.V.D.}$$