

10) LA FORMULA PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

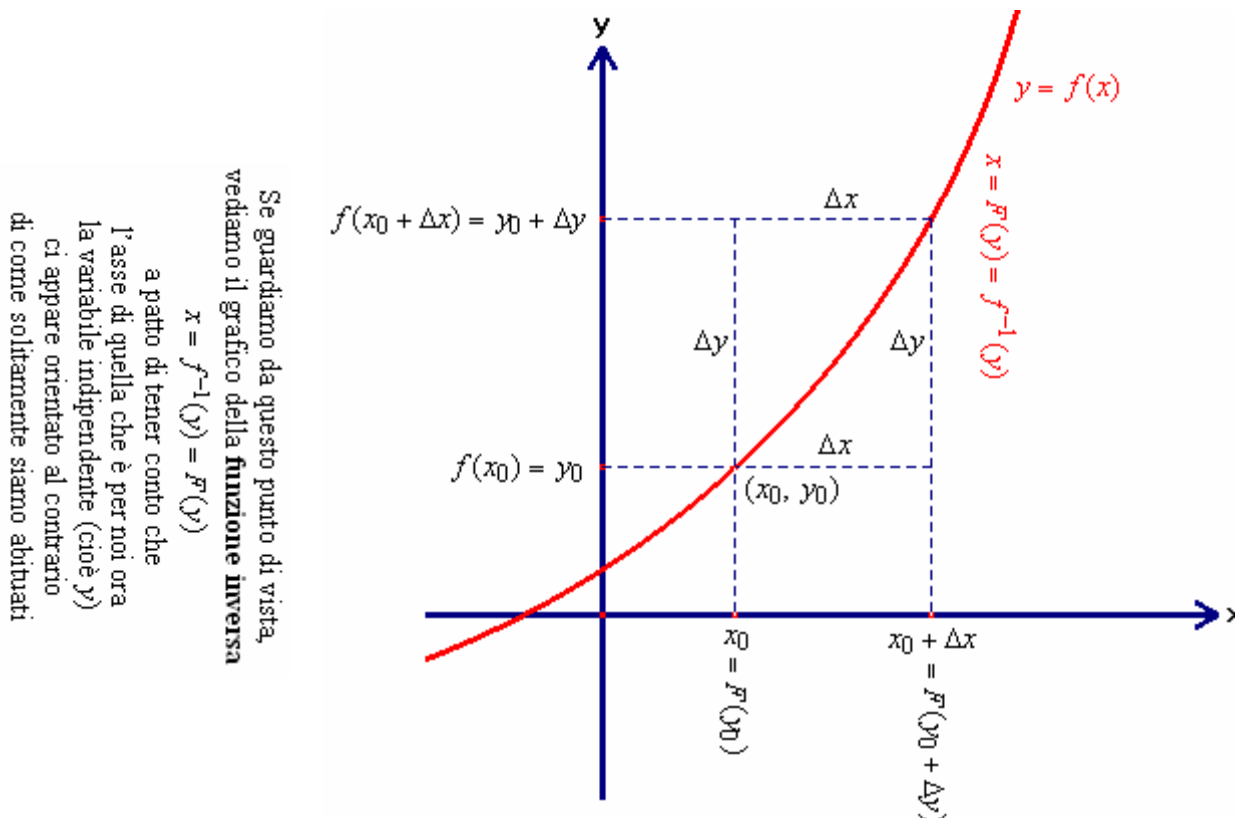
Sia $y = f(x)$ una funzione (**funzione diretta**),

e sia $x = f^{-1}(y) = F(y)$ la rispettiva **funzione inversa**

(osserviamo che

per il discorso che ci interessa in questo momento, sarebbe controproducente scambiare, nella funzione inversa, i nomi delle variabili come abbiamo invece fatto in altre occasioni!).

Sia (x_0, y_0) un punto del grafico della funzione diretta $f : x_0 \xrightarrow{f} y_0; y_0 \xrightarrow{F=f^{-1}} x_0$



Se guardiamo da qui, vediamo la **funzione diretta** $y = f(x)$

rapporto incrementale della $F(=f^{-1})$ in $y_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\text{rapporto incrementale della } f \text{ in } x_0}$

Supponiamo ora f derivabile in x_0 , con $f'(x_0) \neq 0$;

f sarà dunque anche continua in x_0 ;

di conseguenza, per un teorema a noi noto, anche la funzione inversa F sarà continua in $y_0 = f(x_0)$.

Quando perciò faremo tendere Δy a zero, anche Δx tenderà a zero.

Possiamo scrivere: $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$

$$\text{ossia } F'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

NOTA. Abbiamo già puntualizzato che quando Δy tende a zero, anche Δx tende a zero.

Δx può essere riguardata come quantità che dipende da Δy (= come funzione di Δy);

quindi possiamo pensare ad una composizione di funzioni,

sulla quale è applicabile il "Teorema di sostituzione".

Tutto ciò dimostra

(sostituendo, a questo punto, il simbolo x_0 col simbolo x e il simbolo y_0 col simbolo y , ma tenendo comunque sempre presente che x, y devono indicare due valori che "si corrispondono"),
 il seguente

Teorema

La derivata di una funzione inversa è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta (purché quest'ultima derivata esista e non sia nulla).

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

In simboli:

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

essendo:

- x un punto fissato;
- $F = f^{-1}$ funzione inversa di f ;
- $f'(x)$ esistente e non nulla;
- y immagine di x attraverso la f ;
- x controimmagine di y attraverso la f (o anche: immagine di y attraverso la $F = f^{-1}$)

E' IMPORTANTISSIMO RICORDARE che le due derivate che compaiono nella formula si intendono calcolate in due punti CHE SI CORRISPONDONO!

$$y = f(x) \quad x = F(y) = f^{-1}(y)$$

ESEMPIO

Partiamo dalla funzione $y = f(x) = x^3 + 1$ (funzione diretta)

e, ricavando x dall'uguaglianza, otteniamo $x = f^{-1}(y) = F(y) = \sqrt[3]{y-1}$ (funzione inversa).

Abbiamo, ad esempio, che per $x = 2$ la y corrispondente è $y = f(2) = 8 + 1 = 9$

In questo caso, la formula darà: $F'(9) = \frac{1}{f'(2)}$. Andiamo a controllare se è vero!

$$\text{Calcoliamo } F'(9): \quad F'(y) = \frac{1}{3}(y-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} \rightarrow \boxed{F'(9)} = \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}} \right]_{y=9} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$\text{Calcoliamo } f'(2): \quad f'(x) = 3x^2 \rightarrow \boxed{f'(2)} = \left[3x^2 \right]_{x=2} = \boxed{12}$$

OK!!! $F'(9)$ ed $f'(2)$ sono effettivamente numeri fra loro reciproci!

ESERCIZIO SVOLTO

La funzione $y = 2x^2 + \ln x$ è definita per $x > 0$.

Essendo la somma di due funzioni crescenti, è monotona crescente, quindi invertibile.

La funzione inversa non è esprimibile elementarmente; tuttavia, è richiesto di calcolare la derivata di detta funzione inversa, in corrispondenza del punto 2.

RISOLUZIONE

La formula da utilizzare è $F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$: basta interpretarla correttamente, tenendo presente che

- F ed f sono funzioni inverse l'una dell'altra,
- ed x , y sono due punti che si corrispondono.

Per determinare, come è richiesto, la derivata della funzione inversa F nel punto 2, dovremo innanzitutto trovare a quale valore di x corrisponde, attraverso la funz. diretta f , il valore $y = 2$.

Insomma, dovremo cercare per quale x si ha $2x^2 + \ln x = 2$;

l'equazione si risolve per tentativi e si trova facilmente $x = 1$.

$$\text{Allora: } \boxed{F'(2)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left[4x + \frac{1}{x} \right]_{x=1}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Le derivate delle funzioni goniometriche inverse

Come applicazione importante, siamo ora in grado di calcolare le derivate delle funz. goniometriche inverse $\arcsen x$, $\arccos x$, $\arctg x$.

Cominciamo dalla prima.

Consideriamo

$y = \arcsen x = f(x)$ come funzione diretta (infatti è QUESTA la funzione che innanzitutto ci interessa ora),
 $x = \sen y = F(y)$ come la rispettiva funzione inversa.

Essendo, per il teorema appena stabilito, $F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, avremo

$$f'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsen x)} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

NOTA $\cos y = \cos(\arcsen x)$.

Ma l'arco il cui seno è x ha come coseno $\sqrt{1-x^2}$

(l'assenza del \pm è dovuta al fatto che la scrittura $\arcsen x$ indica sempre un arco compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, quindi con coseno positivo).

Abbiamo dunque dimostrato che è

$$D(\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Con procedimenti dimostrativi analoghi si può provare (fallo anche tu come esercizio!) che è

$$D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad D(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2} \quad D(\text{arc cotg } x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

ESEMPIO Se è $y = \arctg \frac{x^2}{x+1}$, calcolare y' .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2} \cdot D\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^4}{x^2 + 2x + 1}} \cdot \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{1}{\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}} \cdot \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{x^4 + x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

ESERCIZIO SVOLTO Dalla formula per la derivazione dell'esponenziale: $De^x = e^x$, dedurre quella per la derivazione del logaritmo.

Prendiamo come funzione diretta $y = e^x$ ($= f(x)$). Invertendo, si ha $x = \ln y = f^{-1}(y) = F(y)$.

Ora, $F'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$. Insomma, $D(\ln y) = \frac{1}{y}$ come era richiesto di ottenere.

NOTA.

Si poteva anche assumere il logaritmo come funzione diretta, e l'esponenziale come la rispettiva inversa (in questo modo d'altronde ci eravamo comportati nel corso della dimostrazione del Teorema):

si sarebbe ottenuta la stessa relazione, ma, come è più consueto, con x al posto di y : $D(\ln x) = \frac{1}{x}$.

D'altronde, dire che $D(\ln y) = \frac{1}{y} \quad \forall y$ equivale in tutto e per tutto ad affermare che $D(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \forall x$.

ESERCIZI

Determina le derivate delle funzioni seguenti: a) $y = \arctg x^2$ b) $y = (\arctg x)^2$ c) $y = \arcsen(2x-1)$

RISPOSTE: a) $y' = \frac{2x}{1+x^4}$ b) $y' = \frac{2x}{1+x^2} \arctg x$ c) $y' = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$