

11) LA FUNZIONE DERIVATA E LE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE CONCAVITA' E CONVESSITA' DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $y = f(x)$, derivabile su di un insieme E , possiamo pensare alla sua funzione derivata $f'(x)$ come ad una nuova funzione che, eventualmente, potrà essere a sua volta derivabile, magari soltanto su di un sottoinsieme di E .

La derivata della derivata prima si chiama "derivata seconda" e si indica con uno dei simboli:

$$f''(x), \quad y'', \quad D^2 f(x), \quad D^2 y, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ (leggi: derivata seconda di } y \text{ fatta rispetto a } x \text{ due volte)}$$

A sua volta, la derivata seconda $f''(x)$, vista come funzione, potrà eventualmente essere derivabile e in tal caso si parlerà di **derivata terza**; e così di seguito con la **derivata quarta**, la **derivata quinta**, ecc.

ESEMPIO 1: $y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x} \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \quad y''' = \frac{2}{x^3} \quad y^{IV} = -\frac{6}{x^4} \quad y^V = \frac{24}{x^5} \quad \dots$
per cui avremo, ad es.: $y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -1, \quad y'''(1) = 2, \quad y^{IV}(1) = -6, \quad y^V(1) = 24, \dots$

ESEMPIO 2: $f(x) = x^4 - x^3 \quad f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \quad f''(x) = 12x^2 - 6x \quad f'''(x) = 24x - 6$
 $f^{IV}(x) = 24 \quad f^V(x) = 0 \quad f^{VI}(x) = 0 \quad f^{VII}(x) = 0 \quad \dots$ insomma, $f^{(k)}(x) = 0$ per ogni $k > 4$

Il polinomio di 4° grado considerato ha tutte le derivate di ordine superiore al 4° uguali a 0.

In generale, preso un qualsivoglia polinomio di grado n , si vede che, ad ogni derivazione, esso si abbassa di un grado, perciò avrà come derivata di n -esimo ordine una costante, e tutte le derivate di ordine maggiore di n nulle.

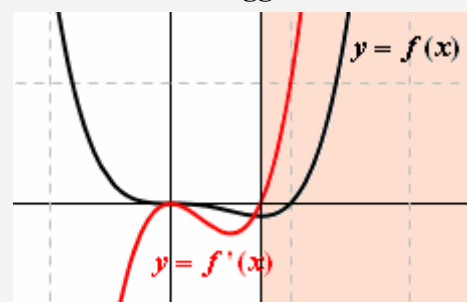
Nella figura qui a fianco sono rappresentate la nostra funzione $f(x) = x^4 - x^3$ e la sua DERIVATA PRIMA $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$.

Laddove la derivata prima è positiva (risp.: negativa), la retta tangente al grafico della $f(x)$ è in salita (risp.: discesa) e quindi la $f(x)$ ha un andamento crescente (risp.: decrescente)

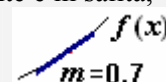
- ♥ derivata PRIMA positiva → funzione crescente ↗
- ♥ derivata PRIMA negativa → funzione decrescente ↘

Figura:

a destra dell'ascissa $x = 3/4$ la f' diventa positiva ...
... e simultaneamente la f diventa crescente ↗.
Invece a sinistra dell'ascissa $x = 3/4$ la f' è negativa ...
... e simultaneamente la f è decrescente ↘



$f' > 0$ significa che il coeff. angolare della tangente al grafico della f è > 0 , quindi che la retta tangente è in salita, quindi che la stessa f è CRESCENTE ↗



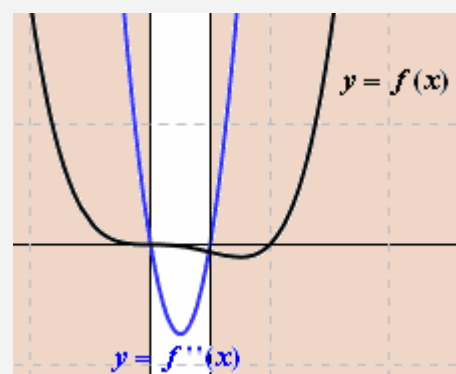
Nella seconda figura sono rappresentate la nostra funzione $f(x) = x^4 - x^3$ e la sua DERIVATA SECONDA $f''(x) = 12x^2 - 6x$.

La derivata seconda è la derivata della derivata prima; allora, laddove la derivata seconda è positiva (risp.: negativa), la derivata prima è crescente (risp.: decrescente), e dunque il coefficiente angolare (= inclinazione!) della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ cresce (risp.: decresce), al crescere dell'ascissa ... ma ciò comporta che la forma del grafico della $f(x)$ sia convessa \cup (risp.: concava \cap)

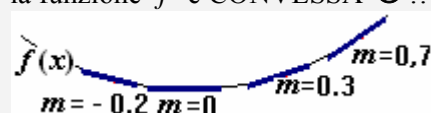
- ♥ derivata SECONDA positiva → funzione convessa \cup
- ♥ derivata SECONDA negativa → funzione concava \cap

Figura:

a sinistra dell'ascissa 0, e a destra dell'ascissa $1/2$, la f'' è positiva ... e simultaneamente la f è convessa \cup
Invece fra l'ascissa 0 e l'ascissa $1/2$ la f'' è negativa ... e simultaneamente la f è concava \cap



$f'' > 0$ significa f' crescente, quindi significa che spostando l'occhio da sinistra a destra ...
... il coefficiente angolare cresce, l'inclinazione cresce, la funzione f è CONVESSA \cup !!!



ESERCIZI

ESEMPIO SVOLTO. Studia la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, determinandone:

- il dominio;
- le intersezioni con gli assi;
- la "positività", cioè i valori di x per i quali la y corrispondente è positiva (il che permetterà di individuare pure, per esclusione, i valori di x per i quali la y corrispondente è negativa);
- i limiti ai confini del dominio
- la derivata prima $f'(x)$ e i valori di x per i quali questa si annulla (equazione $f'(x) = 0$) nonché gli intervalli in cui è positiva (disequazione $f'(x) > 0$)
- la derivata seconda $f''(x)$ e gli intervalli in cui questa è positiva (disequazione $f''(x) > 0$)

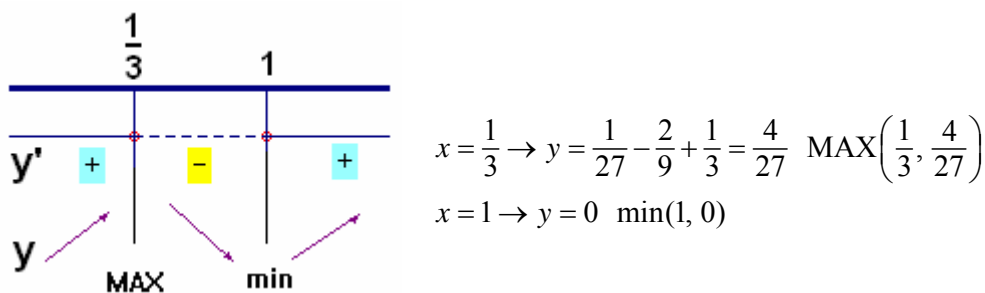
Tenendo presente che

derivata PRIMA positiva \rightarrow *funzione crescente* \nearrow
derivata PRIMA negativa \rightarrow *funzione decrescente* \searrow
derivata SECONDA positiva \rightarrow *funzione convessa* \cup
derivata SECONDA negativa \rightarrow *funzione concava* \cap

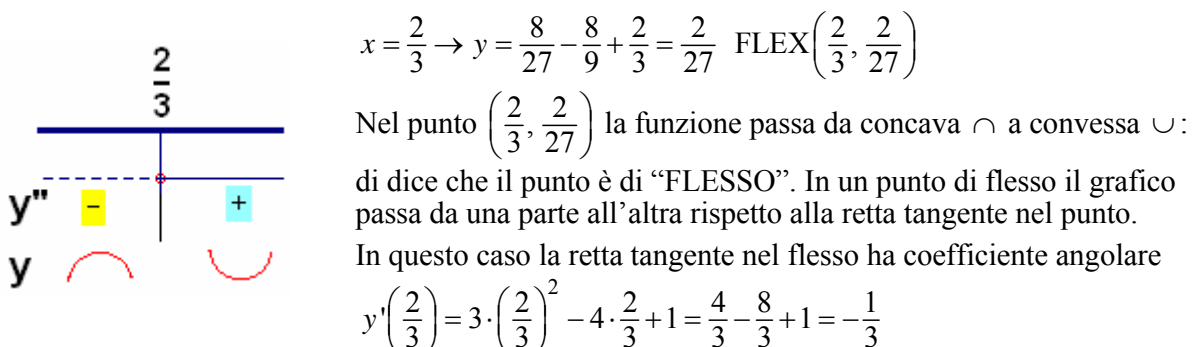
traccia il grafico della funzione considerata.

SVOLGIMENTO

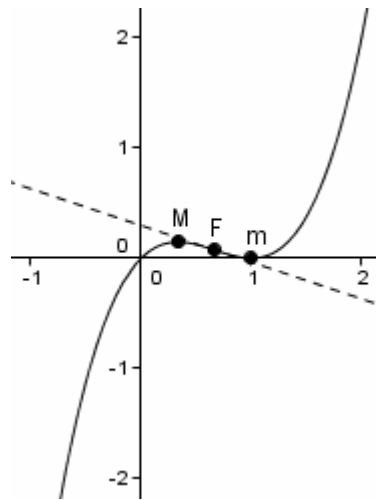
- Il dominio è tutto $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;
- Intersezione con l'asse y : pongo $x = 0$ e ottengo $y = 0$; punto $(0, 0)$
Intersezione con l'asse x : pongo $y = 0$ e ottengo l'equazione
 $x^3 - 2x^2 + x = 0$; $x(x^2 - 2x + 1) = 0$; $x(x-1)^2 = 0$; $x = 0 \vee x = 1$; punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$
- Positività: imposto la disequazione $f(x) > 0$
 $x^3 - 2x^2 + x > 0$; $x(x^2 - 2x + 1) > 0$; $x(x-1)^2 > 0$; $x > 0$ ma $x \neq 1$
- Limiti ai confini del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$
- Derivata prima: $y' = 3x^2 - 4x + 1$
Valori di x per i quali la derivata prima si annulla: $3x^2 - 4x + 1 = 0$ $x = \frac{1}{3} \vee x = 1$
Intervalli in cui la derivata prima è positiva: $3x^2 - 4x + 1 > 0$ $x < \frac{1}{3} \vee x > 1$



- Derivata seconda: $y'' = 6x - 4$
i valori di x per i quali la derivata seconda è positiva: $6x - 4 > 0$ $x > 2/3$



Ed ecco il grafico!



ESERCIZI DA SVOLGERE

Per ciascuna delle seguenti funzioni, determina:

- il dominio;
- le intersezioni con gli assi;
- la "positività"
- i limiti ai confini del dominio
- i punti di massimo, minimo e flesso tramite lo studio delle derivate prima e seconda

Controlla infine le tue conclusioni tramite il freeware GeoGebra.

- $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 6$
- $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x$
- $y = x^4 - 6x^2 - 40$
- $y = x^2 - \frac{16}{x}$
- $y = xe^x$
- $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ("seno iperbolico")
- $y = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$
- $y = x - \ln x$
- $y = x^2 - 4 \ln x^2$
- $y = 1 - 2 \operatorname{sen} x \cos x$ (su $[0, 2\pi]$)
- $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

Questi esercizi sono tratti
dal libro
"public domain"

THE CALCULUS,
di Ellery Williams Davis
e William Charles Brenke,
New York 1924



RISPOSTE

- Max con $x = -1$, min con $x = 5$, flesso con $x = 2$
- Max con $x = -11/6$, min con $x = 5/6$, flesso con $x = -1/2$
- Max con $x = 0$, min con $x = \pm\sqrt{3}$, flessi con $x = \pm 1$
- nessun massimo, min con $x = -2$, flesso con $x = 2\sqrt[3]{2}$
- nessun massimo, min con $x = -1$, flesso con $x = -2$
- nessun massimo, nessun minimo, flesso con $x = 0$
- Max con $x = 1$, nessun minimo, flesso con $x = 2$
- nessun massimo, min con $x = 1$, nessun flesso
- nessun massimo, min con $x = \pm 2$, nessun flesso
- Max con $x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$, min con $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi$, flessi con $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi$
- Max con $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, min con $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, flessi con $x = k\pi$