4. DATA UNA DISUGUAGLIANZA, SI POSSONO ELEVARE A POTENZA I DUE MEMBRI? SI POSSONO ESTRARRE LE RADICI DEI DUE MEMBRI?

Ed ecco infine due ulteriori proprietà molto rilevanti,
che occorre padroneggiare perfettamente:

Se indichiamo con 2n+1 un numero naturale DISPARI,
e con a, b due numeri reali DI SEGNO QUALSIASI:

$$a < b \leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$$

$$a < b \leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$$

Se indichiamo con 2n un numero naturale PARI,
e con a, b due numeri reali POSITIVI O NULLI:

$$a < b \leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$$

$$a < b \leftrightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

Ricordiamo (importantissimo!) che, parlando di radicali:

Se l'indice è DISPARI,

- il radicando potrà essere di segno qualsiasi: positivo, negativo o nullo
- e il risultato dell'estrazione di radice conserverà sempre lo stesso segno del radicando;

Se l'indice è PARI,

- il radicando dovrà essere positivo o nullo, altrimenti l'operazione sarebbe impossibile (NOTA)
- il risultato dell'estrazione di radice è, *per convenzione*, anch'esso positivo o nullo
  (insomma, NON è $\cancel{\sqrt{9} = \pm 3}$, bensì $\sqrt{9} = 3$)

NOTA
… a meno di sconfinare in campo complesso, cosa che, salvo esplicito avviso contrario, non si fa mai.
E d'altronde, nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi
la comunità matematica NON definisce le relazioni di < e >.

Le due proprietà di cui ci stiamo occupando possono essere riassunte come segue:

Data una disuguaglianza,
è SEMPRE lecito
(qualunque siano i segni dei due membri)
elevare ambo i membri ad esponente DISPARI,
o estrarne le radici con lo stesso indice DISPARI

Invece,

l'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,
o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
sono leciti
SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI
DELLA DISUGUAGLIANZA DATA
SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.