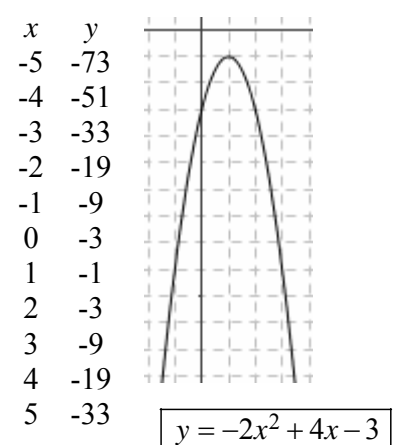
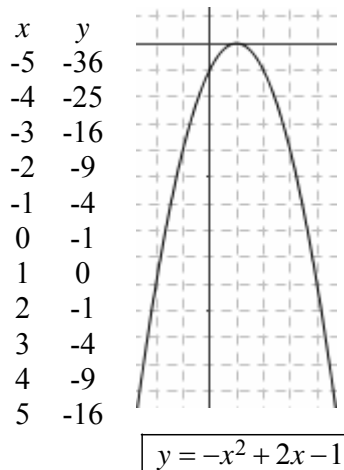
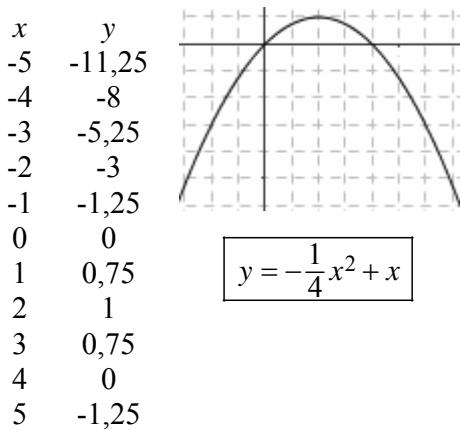
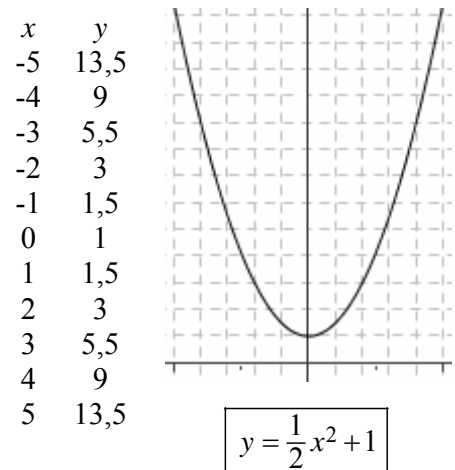
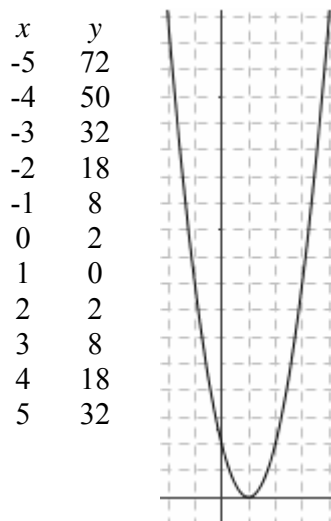
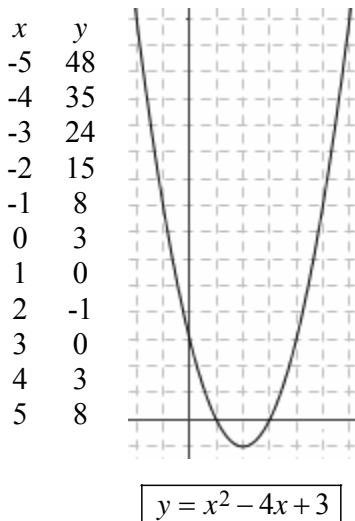


## 7. LO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO E LA RISOLUZIONE DI UNA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO

“STUDIARE IL SEGNO” DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO  
significa chiedersi per quali valori della variabile il trinomio

- assume valore positivo;
- si annulla;
- assume valore negativo

Ecco qui di seguito i grafici di alcuni trinomi di 2° grado, pensati come funzioni  
(l'unità di misura è 1 quadretto):



Come avevamo già avuto modo di evidenziare in precedenza,  
il grafico di un trinomio di 2° grado, pensato come una funzione,  
è costituito da una curva che ha un tipico andamento  
“scendi-poi-sali”, oppure “sali-poi-scendi”,  
chiamata “parabola”.

Quando il **coefficiente di  $x^2$**  nel trinomio è **positivo**,  
la parabola ha la **concavità** (la parte “cava”)  
**rivolta verso l'alto** →



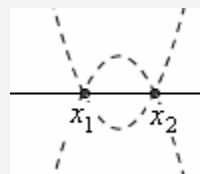
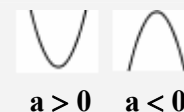
mentre se il **coefficiente di  $x^2$**  è **negativo**,  
la parabola ha la **concavità**  
**rivolta verso il basso** →



Lo studio del segno di un trinomio di 2° grado assegnato  $ax^2 + bx + c$  si effettuerà disegnando “approssimativamente” la parabola  $y = ax^2 + bx + c$  che rappresenta il grafico del trinomio dato, pensato come funzione, poi andando a vedere per quali valori di  $x$  la  $y$  corrispondente (ossia, il valore assunto dal trinomio) è positiva, nulla, negativa.

Ora, per tracciare approssimativamente la parabola in questione basterà:

- ♪ stabilire se la sua concavità è rivolta verso l'alto oppure verso il basso, semplicemente osservando il segno del coefficiente di  $x^2$  nel trinomio;
- ♪ stabilire se la parabola interseca l'asse  $x$ , e, in caso affermativo, DOVE lo interseca: ma ciò equivale a chiedersi per quali valori di  $x$  risulta  $y = 0$ , cioè a risolvere l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$  (detta “equazione associata” al trinomio considerato).



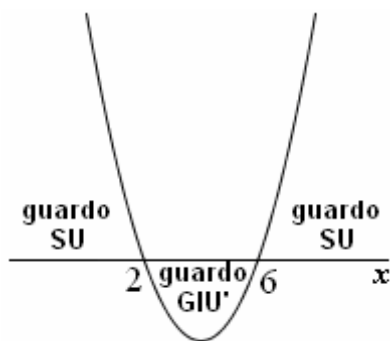
Studiamo, ad esempio, il segno del seguente trinomio di 2° grado:  $x^2 - 8x + 12$

Si tratta di tracciare approssimativamente il grafico della parabola  $y = x^2 - 8x + 12$ .

- ♪ Di essa sappiamo che ha la concavità rivolta verso l'alto, perché il coefficiente di  $x^2$  è  $1 > 0$ .
- ♪ Ora stabiliremo per quali valori di  $x$  la parabola interseca l'asse orizzontale, risolvendo l'equazione  $x^2 - 8x + 12 = 0$ .

Con la formula, o per scomposizione in fattori, si trova  $x = 2 \vee x = 6$ .

Allora il grafico sarà (ci interessa solo una “bozza”!) il seguente:



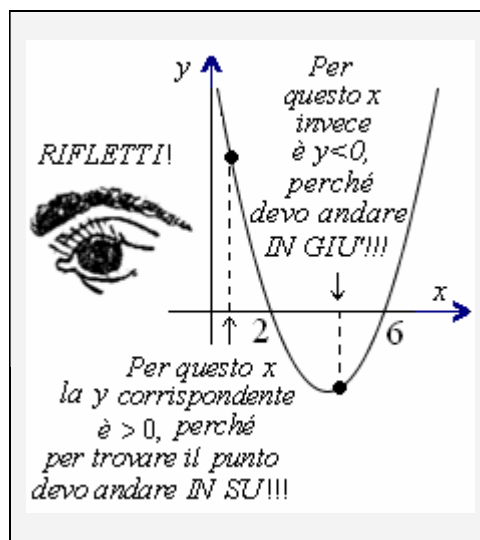
- ♥ Immagina di essere una FORMICHINA che cammina sull'asse delle  $x$ . I valori di  $x$  per cui è  $y > 0$  sono quelli per i quali il punto sulla parabola lo si vede guardando verso l'alto.

... e osservando il grafico si traggono subito le conclusioni ( $y$  esprime il valore del trinomio):  
 $y > 0$  per  $x < 2 \vee x > 6$   
 $y = 0$  per  $x = 2 \vee x = 6$   
 $y < 0$  per  $2 < x < 6$

Ad es., con  $x = 5$   
 (5 è compreso fra 2 e 6)  
 il trinomio

dovrebbe assumere  
 valore negativo.

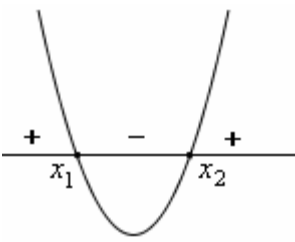
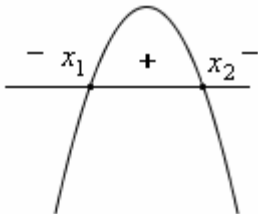
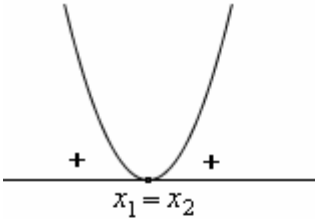
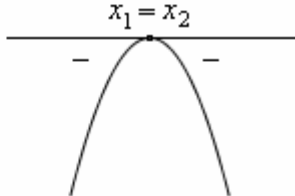
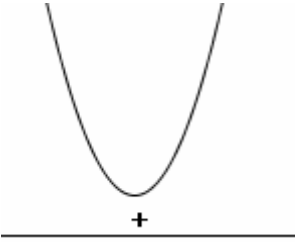
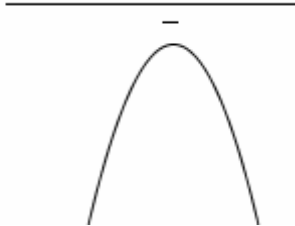
Controlla, sostituendo!  
 Troverai che con  $x = 5$   
 il trinomio vale  $-3$



**ESERCIZI.** Studiare il segno dei trinomi seguenti (risposte subito a fianco):

- |                     |  |                     |   |
|---------------------|--|---------------------|---|
| 1) $-x^2 - x + 20$  | $y > 0$ per $-5 < x < 4$<br>$y = 0$ per $x = -5 \vee x = 4$<br>$y < 0$ per $x < -5 \vee x > 4$ | 2) $2x^2 - x$       | $y > 0$ per $x < 0 \vee x > 1/2$<br>$y = 0$ per $x = 0 \vee x = 1/2$<br>$y < 0$ per $0 < x < 1/2$   |
| 3) $x^2 - 14x + 49$ | $y > 0$ per $x \neq 7$<br>$y = 0$ per $x = 7$<br>$y < 0$ per nessun valore di $x$              | 4) $x^2 - x + 1$    | $y > 0$ per tutti i valori di $x$<br>$y = 0$ per nessun valore di $x$<br>$y < 0$ per nessun valore di $x$   |
| 5) $49 - x^2$       | $y > 0$ per $-7 < x < 7$<br>$y = 0$ per $x = -7 \vee x = 7$<br>$y < 0$ per $x < -7 \vee x > 7$ | 6) $x^2 - 20x + 64$ | $y > 0$ per $x < 4 \vee x > 16$<br>$y = 0$ per $x = 4 \vee x = 16$<br>$y < 0$ per $4 < x < 16$  |
| 7) $x^2 - 16x + 64$ | $y > 0$ per $x \neq 8$<br>$y = 0$ per $x = 8$<br>$y < 0$ per nessun valore di $x$              | 8) $x^2 - 12x + 64$ | $y > 0$ per tutti i valori di $x$<br>$y = 0$ per nessun valore di $x$<br>$y < 0$ per nessun valore di $x$   |
| 9) $2x^2 + 2x - 24$ | $y > 0$ per $x < -4 \vee x > 3$<br>$y = 0$ per $x = -4 \vee x = 3$<br>$y < 0$ per $-4 < x < 3$ | 10) $-x^2 + 2x + 1$ | $y > 0$ per $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$<br>$y = 0$ per $x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}$<br>$y < 0$ per $x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$ |

Volendo, si possono enunciare le seguenti **REGOLE**:

<p>Un trinomio di 2° grado <math>ax^2 + bx + c</math> con <math>\Delta &gt; 0</math> ha <b>segno concorde con quello del suo 1° coeff. per valori di <math>x</math> esterni</b> all'intervallo delimitato dalle due soluzioni dell'equazione associata (cioè, per <math>x &lt; x_1 \vee x &gt; x_2</math>) mentre ha <b>segno discorde</b> rispetto a quello del suo 1° coefficiente <b>per valori interni</b> (cioè, per <math>x_1 &lt; x &lt; x_2</math>)</p>	<p><math>\Delta &gt; 0, a &gt; 0</math></p> 	<p><math>\Delta &gt; 0, a &lt; 0</math></p> 
<p>Un trinomio di 2° grado <math>ax^2 + bx + c</math> con <math>\Delta = 0</math> ha <b>quasi sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, con una sola eccezione:</b> per <math>x = x_1</math>, con <math>x_1 (= x_2)</math> soluzione dell'equazione associata, il trinomio si annulla.</p>	<p><math>\Delta = 0, a &gt; 0</math></p> 	<p><math>\Delta = 0, a &lt; 0</math></p> 
<p>Un trinomio di 2° grado <math>ax^2 + bx + c</math> con <math>\Delta &lt; 0</math> ha <b>sempre segno concorde con quello del suo 1° coefficiente, senza eccezioni.</b></p>	<p><math>\Delta &lt; 0, a &gt; 0</math></p> 	<p><math>\Delta &lt; 0, a &lt; 0</math></p> 

Quando si risolve una disequazione di 2° grado, si ha sempre la possibilità di lavorare con un trinomio col 1° coefficiente positivo: infatti, se così non fosse, si potrebbero sempre cambiare segni e verso.

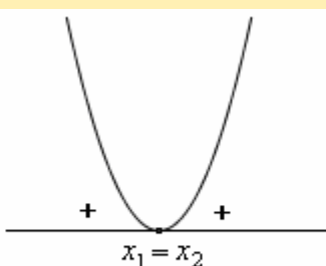
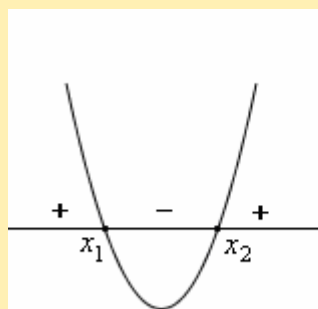
E' perciò molto comodo, oltre che conoscere bene le regole sopra riportate, tenere anche presente cosa dicono **LE STESSE REGOLE**, quando vengono **PARTICOLARIZZATE AL CASO  $a > 0$** :

♥ **UN TRINOMIO DI 2° GRADO  $ax^2 + bx + c$  CON 1° COEFFICIENTE POSITIVO ( $a > 0$ )**

se ha  $\Delta > 0$   
è **positivo per valori esterni**  
 $x < x_1 \vee x > x_2$   
e **negativo per valori interni**  
 $x_1 < x < x_2$

se ha  $\Delta = 0$   
è **positivo per ogni valore di  $x$ ,**  
**con una sola eccezione:**  
è nullo per  $x = x_1 (= x_2)$

se ha  $\Delta < 0$   
è **positivo**  
**per ogni valore di  $x$ ,**  
**senza eccezioni.**



Rimpiazzando, in questo schema, "positivo/negativo" con "concorde/discorde, in segno, rispetto al segno del 1° coefficiente", ecco che si torna alle regole generali.

**Una DISEQUAZIONE DI 2° GRADO ci chiede di rispondere a uno solo dei tre punti in cui consiste lo studio del segno di un trinomio di 2° grado. Vediamo alcuni ESEMPI SVOLTI.**

$$\boxed{x^2 - 7x + 10 < 0}$$

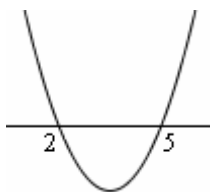
Equazione associata:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 5$$

Il grafico della parabola  $y = x^2 - 7x + 10$  è il seguente ( $a > 0$ , quindi concavità verso l'alto):



La disequazione (che ha verso  $<$ ) è perciò verificata per:  $\boxed{2 < x < 5}$

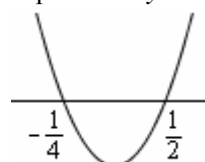
$$\boxed{2x + 1 < 8x^2}$$

$$-8x^2 + 2x + 1 < 0$$

1° coefficiente negativo: conviene cambiare segni e verso  
 $8x^2 - 2x - 1 > 0$

Penso all'equazione associata e la risolvo:  $x_{1,2} = \dots = \begin{cases} -1/4 \\ 1/2 \end{cases}$

Il grafico della parabola  $y = 8x^2 - 2x - 1$  è:



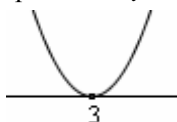
La disequazione (il cui verso *definitivo* è  $>$ ) risulta quindi verificata per:  $\boxed{x < -1/4 \vee x > 1/2}$

$$\boxed{x^2 - 6x + 9 > 0}$$

L'equazione associata è:  $x^2 - 6x + 9 = 0$

con le soluzioni  $x_1 = x_2 = 3$

Il grafico della parabola  $y = x^2 - 6x + 9$  è:



La disequazione è perciò verificata per  $\boxed{x \neq 3}$

Anche (meglio!) con ragionamento più diretto:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0$$

La disequazione ci chiede dunque di stabilire per quali valori di  $x$  il quadrato  $(x-3)^2$  è strettamente positivo.

Ma un quadrato è **quasi sempre** strettamente positivo: l'unica eccezione si ha quando il quadrato si annulla, il che avviene quando si annulla la sua base.

Perciò la disequazione proposta è verificata "quasi sempre", purché sia  $x - 3 \neq 0$ ,  $x \neq 3$ .

$$\boxed{x < \frac{x^2 + 5}{4}}$$

$$4x < x^2 + 5$$

$$-x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$x^2 - 4x + 5 > 0$$

Passando all'equazione associata, si vede che è  $\Delta < 0$  per cui tale equazione è impossibile.

Ciò significa che non esiste nessun valore di  $x$  per il quale si abbia  $y = x^2 - 4x + 5 = 0$ :

la parabola  $y = x^2 - 4x + 5$

è priva di intersezioni con l'asse delle  $x$  e il suo grafico è



La disequazione è perciò verificata  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$

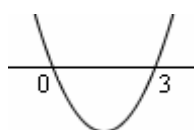
$$\boxed{x^2 > 3x}$$

$$x^2 - 3x > 0$$

$$x(x-3) > 0$$

Mutando ora nella nostra mente il  $>$  in  $=$  per pensare all'equazione associata, vediamo che le soluzioni di questa sono  $x = 0 \vee x = 3$

Grafico:



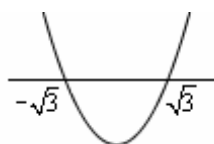
Soluzioni della disequazione:

$$\boxed{x < 0 \vee x > 3}$$

$$\boxed{x^2 > 3}$$

$$x^2 - 3 > 0$$

Eq. associata:  $x^2 - 3 = 0$ , con le soluzioni  $x = \pm\sqrt{3}$ .



Soluzioni della disequazione:

$$\boxed{x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}}$$

**NOTA**

Sarebbe stato possibile risolvere questa disequazione anche in un altro modo, sullo stile dell'Esempio 1 di pagina 14

$$\boxed{x^2 + 3 > 0}$$

Si vede subito che la disequazione è sempre verificata,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Infatti il 1° membro è la somma di due termini, il primo dei quali è  $\geq 0$  per ogni  $x$  e il secondo dei quali è una costante  $> 0$ .

E' quindi evidente che la somma di tali due termini sarà  $> 0$  per ogni  $x$ .

$$\underbrace{\geq 0}_{x^2} \forall x \quad \underbrace{\geq 0}_{+3} > 0, \forall x$$

Volendo risolvere in modo "standard", si trova un'eq. ass. impossibile, quindi un grafico "tutto sopra" rispetto all'asse  $x$ , e la conclusione è la medesima:

disequazione verificata  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$