

## ANCORA SULLO STUDIO DEL SEGNO DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

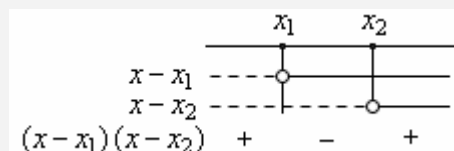
Abbiamo detto che il grafico di una funzione di 2° grado  $y = ax^2 + bx + c$  è una curva che va “prima giù e poi su” oppure “prima su e poi giù”, detta “parabola”. E’ evidente che il discorso è generico: richiederebbe una impostazione più rigorosa, e corredata da dimostrazioni di quanto affermato. Ciò è compito della “Geometria Analitica”.

Ci limitiamo qui ad affermare che, **volendo, le regole per lo studio del segno di un trinomio di 2° grado potrebbero anche essere ricavate senza interpretazione grafica, ossia per pura via algebrica.**

Sia infatti  $ax^2 + bx + c$  un trinomio di 2° grado. Sappiamo che

- 1) se  $\Delta > 0$ , il trinomio è scomponibile in  $a(x - x_1)(x - x_2)$ , con  $x_1, x_2$  soluzioni dell’equazione associata.

Ma in questo caso allora, dato che il fattore  $x - x_1$  è  $>, =, < 0$  a seconda che sia  $x > x_1, x = x_1, x < x_1$ , e analogamente per il fattore  $x - x_2$ , il prodotto  $(x - x_1)(x - x_2)$  avrà, a seconda dei vari valori di  $x$ , il segno che risulta dallo schema riportato qui a destra → ed essendo dunque  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , se ne trae che il trinomio avrà



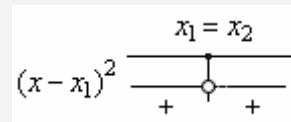
*tratteggio = negatività,  
linea continua = positività*

**“segno concorde con quello del suo primo coefficiente  $a$  per valori esterni, discorde per valori interni”**

- 2) se  $\Delta = 0$ , il trinomio è scomponibile in  $a(x - x_1)^2$ , con  $x_1 (= x_2)$  unica soluzione dell’equaz. associata.

Poiché ora un quadrato è sempre  $> 0$ , con la sola eccezione di essere  $= 0$  se ne è  $= 0$  la base, se ne trae che **il trinomio avrà sempre segno concorde con quello del suo primo coefficiente  $a$ , con una sola eccezione:**

il trinomio infatti si annullerà per  $x = x_1$ , essendo  $x_1 (= x_2)$  l’unica soluzione che in questo caso possiede l’equazione associata.



*linea continua = positività,  
pallino = annullamento*

- 3) se, infine,  $\Delta < 0$ , l’equazione associata è impossibile in campo reale, e **il trinomio non è scomponibile in campo reale;** in questo caso però possiamo scrivere

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{> 0}\right] \end{aligned}$$

Siccome è  $\Delta < 0$ , il contenuto della parentesi quadra sarà strettamente positivo ( $> 0$ ) perché somma di un termine non negativo (il quadrato) con un termine  $> 0$

$\left(-\frac{\Delta}{4a^2}, \text{ che è } > 0 \text{ perché è l'opposto del quoziente fra } \Delta < 0 \text{ e } 4a^2 > 0\right)$ .

Ma il prodotto del coefficiente  $a$  per un numero strettamente positivo qualunque sia  $x$ , **ha sempre, per qualsiasi valore di  $x$ , lo stesso segno di  $a$ .**

## 10. DISEQUAZIONI IN CUI COMPAGNONO POTENZE

### D) UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

a)  $(x - 7)^4 > 0$     b)  $(x - 7)^4 < 0$     c)  $(x - 7)^4 \geq 0$     d)  $(x - 7)^4 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta ragionare così:

**una quarta potenza (più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI) NON PUO’ MAI ESSERE NEGATIVA.**

Essa è:

- **POSITIVA** quando la **BASE** è **DIVERSA DA 0**;
- **NULLA** quando la **BASE** è **UGUALE A 0**.

Perciò:

- a)  $(x-7)^4 > 0$  è verificata quando  $x-7 \neq 0$ , ossia  $x \neq 7$ . Insieme delle soluzioni =  $S = \mathbb{R} - \{7\}$   
 b)  $(x-7)^4 < 0$  non è mai verificata, è **impossibile**:  $S = \emptyset$   
 c)  $(x-7)^4 \geq 0$  è **sempre verificata**, per ogni  $x$ :  $S = \mathbb{R}$   
 d)  $(x-7)^4 \leq 0$  è **verificata solo per  $x = 7$** .  $S = \{7\}$

E' chiaro che allo stesso modo avremmo potuto procedere  
 se al posto dell'esponente 4 ci fosse stato un qualunque esponente PARI.

### ESERCIZI

- 1)  $(2x-1)^6 < 0$       2)  $(3x-8)^8 > 0$       3)  $(x^2-3)^4 > 0$       4)  $(6x^2-18x+5)^2 \geq 0$   
 5)  $(4-x)^6 \leq 0$       6)  $x^{10} > 0$       7)  $(3x^2-2x-1)^2 > 0$       8)  $(3-7x)^4 < 0$       9)  $(3-7x)^4 \leq 0$

### SOLUZIONI

- 1) imposs.      2)  $x \neq 8/3$       3)  $x \neq \pm\sqrt{3}$       4)  $\forall x \in \mathbb{R}$   
 5)  $x = 4$       6)  $x \neq 0$       7)  $x \neq -\frac{1}{3} \wedge x \neq 1$       8) imposs.      9)  $x = \frac{3}{7}$

### II) UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI, CONFRONTATA CON LO ZERO

- e)  $(x-7)^5 > 0$     f)  $(x-7)^5 < 0$     g)  $(x-7)^5 \geq 0$     h)  $(x-7)^5 \leq 0$

Per risolvere queste disequazioni basta osservare che

#### una quinta potenza

(più in generale: UNA POTENZA CON ESPONENTE DISPARI)

HA SEMPRE LO STESSO SEGNO DELLA SUA BASE, ossia è:

- **positiva quando la base è positiva;**
- **negativa quando la base è negativa;**
- **nulla quando la base è nulla.**

Perciò:

- e)  $(x-7)^5 > 0$  è verificata quando  $x-7 > 0$ , ossia  $x > 7$ . Insieme delle soluzioni:  $S = (7, +\infty)$   
 f)  $(x-7)^5 < 0$  è verificata quando  $x-7 < 0$ , ossia  $x < 7$ .  $S = (-\infty, 7)$   
 g)  $(x-7)^5 \geq 0$  è verificata quando  $x-7 \geq 0$ , ossia  $x \geq 7$ .  $S = [7, +\infty)$   
 h)  $(x-7)^5 \leq 0$  è verificata quando  $x-7 \leq 0$ , ossia  $x \leq 7$ .  $S = (-\infty, 7]$

E allo stesso modo, ovviamente, si sarebbe potuto ragionare  
 se al posto dell'esponente 5 avessimo trovato un qualsiasi altro esponente DISPARI.

### ESERCIZI

- 10)  $(3x-2)^5 > 0$       11)  $(4-x)^5 \geq 0$       12)  $(x^2-3)^5 > 0$       13)  $x^7 < 0$   
 14)  $(3x^2-2x-1)^3 < 0$       15)  $(x+7)^5 \geq 0$       16)  $(x^2+7)^5 > 0$       17)  $(3x^2-2x-1)^4 \geq 0$   
 18)  $(x^2+2x\sqrt{6}+6)^3 > 0$       19)  $(4x^2-1)^3 > 0$       20)  $(9x^2-6x+1)^3 < 0$       21)  $\left[(7x+5)^4+1\right]^3 > 0$

### SOLUZIONI

- 10)  $x > 2/3$     11)  $x \leq 4$     12)  $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$     13)  $x < 0$     14)  $-1/3 < x < 1$     15)  $x \geq -7$   
 16)  $\forall x \in \mathbb{R}$     17)  $\forall x \in \mathbb{R}$     18)  $x \neq -\sqrt{6}$     19)  $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$     20) imposs.    21)  $\forall x \in \mathbb{R}$

### III) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE PARI

**L'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza, o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza, sono leciti SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.**

Infatti, indicato con  $2n$  un intero PARI, e con  $a, b$  due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ha:

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}; \quad a < b \Leftrightarrow \sqrt[2n]{a} < \sqrt[2n]{b}$$

Invece, se due numeri che *non* sono entrambi positivi sono disuguali, *non* è detto che i loro quadrati (ad esempio) siano disuguali nello stesso senso: potrebbero esserlo, o non esserlo.

$$\begin{aligned} -2 < 3 \quad \text{e} \quad 4 < 9 \\ -5 < 3 \quad \text{MA} \quad \cancel{25} < 9 \\ -8 < -5 \quad \text{MA} \quad \cancel{64} < \cancel{25} \end{aligned}$$

**Nel risolvere una disequazione mediante estrazione di radice con indice pari, ci vuole cautela!!!**

- ♪ Innanzitutto, ribadiamolo ancora, **il passaggio è possibile solo quando i due membri sono positivi (in senso lato:  $\geq 0$ ) sempre, ossia per ogni valore di  $x$ ;**
- ♪ inoltre, è **indispensabile ricordare** (Volume 2, Radicali) **che l'estrazione di radice con indice pari costringe, spesso, a introdurre un simbolo di valore assoluto:**  
ad esempio, l'uguaglianza che vale qualunque sia il segno di  $x$  NON è  $\sqrt{x^2} = x$ , bensì  $\sqrt{x^2} = |x|$  !!!

**Esempio 1**  $x^4 > 625$

**Possiamo estrarre le radici quarte perché i due membri sono sempre  $\geq 0$ ,  $\forall x$ :**

$$\sqrt[4]{x^4} > \sqrt[4]{625}$$

**OCCHIO ADESSO!** Deve per forza intervenire il simbolo di valore assoluto, e si ottiene

$$|x| > 5$$

Ma quali sono i numeri reali il cui valore assoluto è maggiore di 5?

**Il valore assoluto di un numero non è altro che la distanza dall'origine del punto che, sulla *number line*, rappresenta quel numero!**

E allora

$$|x| > 5 \Leftrightarrow x < -5 \vee x > 5 \quad (\text{i numeri, la cui distanza dall'origine sulla } \textit{number line} \text{ è } > 5, \text{ sono quelli a destra del } +5 \text{ ma anche quelli a sinistra del } -5)$$

**Es. 2**  $(5x-3)^4 < 16$

$$\sqrt[4]{(5x-3)^4} < \sqrt[4]{16}$$

$$|5x-3| < 2$$

$$-2 < 5x-3 < 2$$

(i numeri il cui val. ass. è  $< 2$  sono quelli la cui "distanza dall'origine" è  $< 2$ , ossia quelli compresi fra  $-2$  e  $+2$ ).

Aggiungendo ora 3 ad ogni anello della catena si ha

$$1 < 5x < 5$$

e dividendo infine per 5

$$\frac{1}{5} < x < 1$$

**Es. 3**  $(x-7)^6 > 64$

$$\sqrt[6]{(x-7)^6} > \sqrt[6]{64}$$

$$|x-7| > 2$$

$$x-7 < -2 \vee x-7 > 2$$

$$x < 5 \vee x > 9$$

**Es. 4**  $(x^2-10x)^2 < 576$

$$\sqrt{(x^2-10x)^2} < \sqrt{576}$$

$$|x^2-10x| < 24$$

$$-24 < x^2-10x < 24$$

Qui però *non* si può isolare  $x$  operando direttamente sulla catena. La doppia limitazione equivale a domandarsi per quali valori di  $x$  sono verificate *simultaneamente entrambe* le condizioni

$$-24 < x^2-10x \quad (\text{o anche } x^2-10x > -24) \quad \text{e} \quad x^2-10x < 24$$

quindi a risolvere il SISTEMA  $\begin{cases} x^2-10x > -24 \\ x^2-10x < 24 \end{cases}$ .

La 1<sup>a</sup> disequaz. è verificata per  $x < 4 \vee x > 6$ , la 2<sup>a</sup> per  $-2 < x < 12$ , quindi il sistema ha per soluzioni i valori  $-2 < x < 4 \vee 6 < x < 12$ ; comunque, dell'argomento si occuperà un capitolo successivo.

**Es. 5**  $x^4 > -16$

**OCCHIO!!!**



**Qui 2° membro è negativo, perciò NON si possono estrarre le radici quarte.**

Siamo *bloccati*, dobbiamo procedere diversamente.

Ma basta osservare che il risultato dell'operazione  $x^4$  è sempre (qualunque sia  $x$ ) positivo ( $\geq 0$ ), per concludere che la disequazione proposta è **sempre verificata,  $\forall x \in \mathbb{R}$** .

#### IV) DISEQUAZIONI RISOLUBILI ESTRAENDO UNA RADICE CON INDICE DISPARI

**L'elevamento ad esponente DISPARI, o l'estrazione di radice con indice DISPARI, è un passaggio SEMPRE LECITO in una disequazione:**

infatti, qualunque siano i segni dei due numeri reali  $a, b$ , valgono le doppie implicazioni

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} \quad a < b \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{a} < \sqrt[2n+1]{b}$$

##### Esempio 1

$$\begin{aligned} x^3 &< 8 \\ \sqrt[3]{x^3} &< \sqrt[3]{8} \\ x &< 2 \end{aligned}$$

##### Esempio 2

$$\begin{aligned} x^5 - 3 &> 0 \\ x^5 &> 3 \\ x &> \sqrt[5]{3} \end{aligned}$$

##### Esempio 3

$$\begin{aligned} (x-7)^3 - 27 &\leq 0 \\ (x-7)^3 &\leq 27 \\ x-7 &\leq 3 \\ x &\leq 10 \end{aligned}$$

##### Esempio 4

$$\begin{aligned} (x-1)^3 &< -2 \\ x-1 &< \sqrt[3]{-2} \\ x-1 &< -\sqrt[3]{2} \\ x &< 1 - \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

##### Esempio 5

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 1)^3 &> 1 \\ x^2 - x - 1 &> 1 \\ x^2 - x - 2 &> 0 \\ (x+1)(x-2) &> 0 \\ x &< -1 \vee x > 2 \end{aligned}$$

#### ESERCIZI (se c'è la freccia, cliccando potrai vedere la correzione)

- |   |   |  |                        |
|---|---|--|------------------------|
| 22) $x^4 > 16$                          | 23) $x^3 > 8$                           | 24) $625x^4 - 1 < 0$                         | 25) $625x^4 + 1 > 0$   |
| 26) $8x^3 - 1 < 0$                      | 27) $8x^3 + 1 < 0$                      | 28) $25x^4 - 49 \geq 0$                      | 29) $x^6 - 1 < 0$      |
| 30) $x^6 - 4 < 0$                       | 31) $x^6 + 4 < 0$                       | 32) $x^8 + 3 > 0$                            | 33) $x^8 - 3 > 0$      |
| 34) $(x-1)^3 < 8$                       | 35) $(x-1)^4 < 16$                      | 36) $(2x+1)^4 - 1 > 0$                       | 37) $(6x+1)^3 + 8 > 0$ |
| 38) $x^6 + 1 \geq 0$                    | 39) $8x^3 + 3 \geq 0$                   | 40) $8x^4 + 3 \geq 0$                        | 41) $x^3 + 16 \leq 0$  |
| 42) $x^4 + 16 \leq 0$                   |   |  |                        |
| 43) $(x-1)^2 + (x-2)^2 > 0 \Rightarrow$ | 44) $(x-1)^3 + (x-2)^3 > 0 \Rightarrow$ | 45) $(x+1)^2 + (x^2-1)^2 \leq 0 \Rightarrow$ |                        |
| 46) $(2x-1)^4 < 0$                      | 47) $(2x-1)^4 > 0$                      | 48) $(2x-1)^3 < 0$                           | 49) $(2x-1)^3 > 0$     |
| 50) $(2x-1)^4 < 1$                      | 51) $(2x-1)^4 > 1$                      | 52) $(2x-1)^3 < 1$                           | 53) $(2x-1)^3 > 1$     |
| 54) $(4x+1)^4 < 3 \Rightarrow$          | 55) $(1-x)^6 < 64 \Rightarrow$          | 56) $(4x-3)^4 > 81 \Rightarrow$              |                        |

#### SOLUZIONI

- |  |                             |   |   |
|--|-----------------------------|---|---|
| 22) $x < -2 \vee x > 2$                                      | 23) $x > 2$                 | 24) $-1/5 < x < 1/5$                              | 25) $\forall x \in \mathbb{R}$              |
| 26) $x < \frac{1}{2}$  | 27) $x < -\frac{1}{2}$      | 28) $x \leq -\sqrt[3]{5} \vee x \geq \sqrt[3]{5}$ | 29) $-1 < x < 1$                            |
| 30) $-\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$                         | 31) imposs.                 | 32) $\forall x \in \mathbb{R}$                    | 33) $x < -\sqrt[8]{3} \vee x > \sqrt[8]{3}$ |
| 34) $x < 3$  | 35) $-1 < x < 3$            | 36) $x < -1 \vee x > 0$                           | 37) $x > -1/2$                              |
| 38) $\forall x \in \mathbb{R}$                               | 39) $x \geq -\sqrt[3]{3}/2$ | 40) $\forall x \in \mathbb{R}$                    | 41) $x \leq -2\sqrt[3]{2}$                  |
| 42) imposs.  |                             |   | 42) imposs.                                 |
| 43) $\forall x \in \mathbb{R}$                               | 44) $x > 3/2$               |   | 45) $x = -1$                                |
| 46) imposs.  | 47) $x \neq 1/2$            | 48) $x < 1/2$                                     | 49) $x > 1/2$                               |
| 50) $0 < x < 1$  | 51) $x < 0 \vee x > 1$      | 52) $x < 1$                                       | 53) $x > 1$                                 |
| 54) $-\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4} < x < \frac{\sqrt[4]{3}-1}{4}$ | 55) $-1 < x < 3$            |   | 56) $x < 0 \vee x > 3/2$                    |

#### CENNI ALLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle che **contengono l'incognita sotto il segno di radice**.

Ci si libera dalle radici elevando a potenza; e tuttavia, mentre l'elevamento a esponente dispari è un'operazione "tranquillissima", perché sempre lecita e sempre tale da mutare la disequazione di partenza in un'altra ad essa equivalente, invece **l'elevamento ad esponente pari**, necessario ad esempio per sbarazzarsi da una radice quadrata, è un **passaggio estremamente problematico**, possibile solo a condizione che i due membri siano positivi per tutti i valori di  $x$ , o almeno "per tutti i valori di  $x$  ai quali ci si sta riferendo".

Tutto ciò costringe ad elaborare una teoria non semplicissima, che fa parte di uno studio più avanzato.