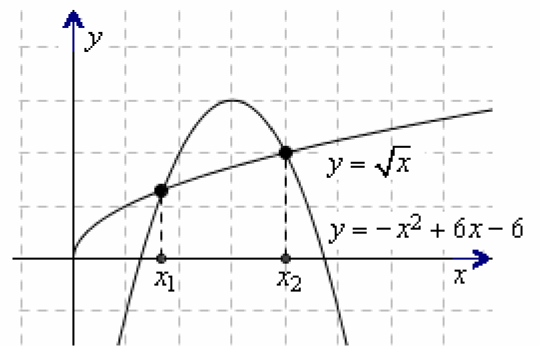
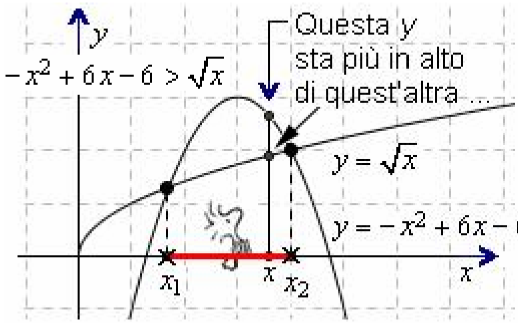
11. LA RISOLUZIONE GRAFICA DI UNA DISEQUAZIONE

- Per risolvere graficamente una disequazione come
  $-x^2+6x-6>\sqrt{x}$
  si tracceranno innanzitutto, in uno stesso riferimento cartesiano, i grafici delle due funzioni a 1° e a 2° membro
  $y=-x^2+6x-6;$
  $y=\sqrt{x}$



A questo punto, la disequazione ci "chiede" di determinare
per quali valori di x la y della prima funzione
è maggiore, quindi sta più in alto, della y della seconda.

Viaggiamo quindi, con gli occhi della mente, lungo l'asse delle x: quali sono i valori di x in corrispondenza dei quali la "y" della funzione a 1° membro $y=-x^2+6x-6$ sta più in alto?
Sono, evidentemente, gli x compresi fra quei due puntini, sull'asse orizzontale,
che rappresentano le ascisse x_1 e x_2 dei punti di intersezione fra le due curve.



La x evidenziata,
vicino alle zampette dell'uccello Woodstock,
vale circa 3,6.

La y che corrisponde a questa x
sulla curva $y=-x^2+6x-6$
vale circa 2,7
ed è maggiore dell'altra y,
quella sulla curva $y=\sqrt{x}$,
che vale meno di 2.

Possiamo così concludere che le soluzioni della disequazione data sono i valori di x tali che
$x_1<x<x_2$ (le crocette che abbiamo messo in figura servono proprio per escludere gli estremi).

Ora, per quanto riguarda x_2 sembrerebbe dalla figura che valga esattamente 4,
e in effetti, se sostituiamo il valore 4 al posto di x nelle due equazioni $y=-x^2+6x-6$ e $y=\sqrt{x}$,
vediamo che si ottiene la stessa y:

$$\left[y=-x^2+6x-6\right]_{x=4}=-16+24-6=2 \quad \text{e anche} \quad \left[\sqrt{x}\right]_{x=4}=2.$$

Per determinare x_1 occorre invece risolvere l'equazione
$-x^2+6x-6=\sqrt{x}$.

Elevando al quadrato, si ottiene un'equazione di 4° grado
di cui già sappiamo che è verificata con $x=4$;
caso vuole, si tratta di un'equazione risolubile per scomposizione in fattori col metodo di Ruffini …
e tuttavia, indipendentemente da questa circostanza, potremmo anche fermarci qui
accontentarndoci di concludere che la nostra disequazione
$-x^2+6x-6>\sqrt{x}$
è verificata per
$x_1<x<4$,
dove x_1 è un determinato valore compreso fra 1,5 e 2.

- Un altro esempio.

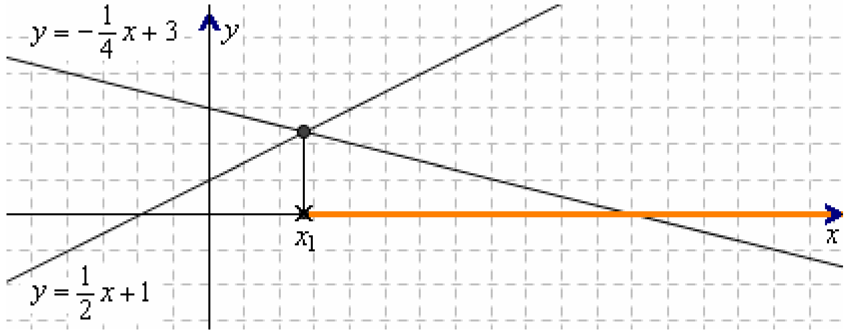
  Volendo risolvere graficamente la disequazione

  $-\frac{1}{4}x+3<\frac{1}{2}x+1$,

  disegneremo i grafici delle due funzioni lineari

  $y=-\frac{1}{4}x+3$ (retta in discesa)

  $y=\frac{1}{2}x+1$ (retta in salita)



  per andare a vedere per quali valori di x accade che l'ordinata corrispondente sulla prima retta è minore, è più bassa, dell'ordinata corrispondente sulla seconda retta.
  Ciò avviene per $x>x_1$, ma quanto vale x_1?
  Dalla figura si può solo vedere che è compresa fra 2 e 3 (più vicina a 3 che a 2 …)

  Per rispondere, risolviamo l'equazione $-\frac{1}{4}x+3=\frac{1}{2}x+1$. Otterremo $x=\frac{8}{3}=2,\overline{6}$.

  Quindi in definitiva la nostra disequazione è verificata con $x>8/3$.

- La figura qui a fianco si riferisce alla disequazione

  $\frac{3}{x}\geq x^2+4x$

  e mostra che essa è verificata quando

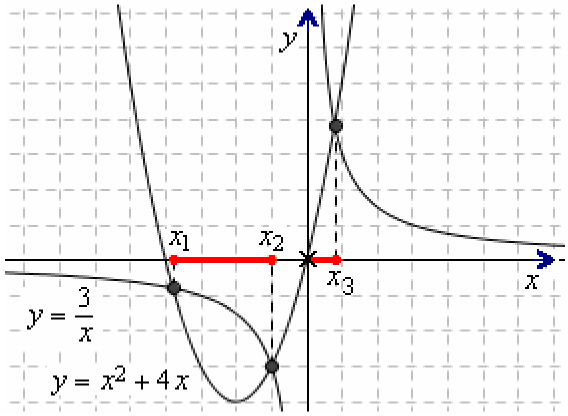
  $x_1\leq x\leq x_2\ \vee\ 0<x\leq x_3$

  dove

  $x_2=-1$

  come il disegno suggerisce e come si può verificare:

  $\left[\frac{3}{x}\right]_{x=-1}=-3\qquad\left[x^2+4x\right]_{x=-1}=-3$



  Quanto alle altre due soluzioni $x_1,\ x_3$

  dell' "equazione associata" $\frac{3}{x}=x^2+4x$,

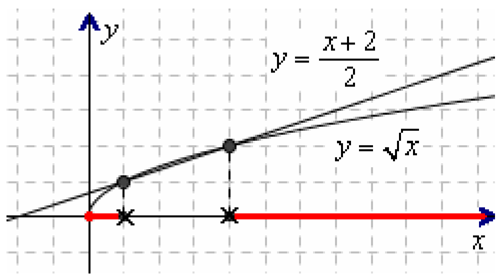
  si possono facilmente determinare scomponendo col metodo di Ruffini il polinomio di 3° grado che si ottiene dopo aver eliminato il denominatore.

  In definitiva si ha $\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\leq x\leq -1\ \vee\ 0<x\leq\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

- A volte quando si risolve graficamente una disequazione occorre anche tenere conto del "**campo di esistenza**" delle funzioni coinvolte.
  Facciamo un esempio:

  la disequazione $\sqrt{x}<\frac{x+2}{2}$

  è verificata per $0\leq x<1\ \vee\ x>4$



ESERCIZI

Risolvi graficamente le disequazioni che seguono.

1) $7-x<3x$ 2) $3-2x>0$ 3) $x^2<x+6$ 4) $\frac{4}{x}>1-x$ 5) $3x+1\leq 2x+5$ 6) $3x-1<5x$

7) $x^2+x>12$ 8) $0,5x^2+1<6/x$ 9) $x^3\leq 2-x$ 10) $\sqrt{x}<4-3x$ 11) $x^3>x^2-1$ 12) $\sqrt[3]{x}>x^2-2$

RISPOSTE

1) $x>\frac{7}{4}$ 2) $x<\frac{3}{2}$ 3) $-2<x<3$ 4) $x>0$ 5) $x\leq 4$ 6) $x>-\frac{1}{2}$ 7) $x<-4\ \vee\ x>3$

8) $0<x<2$ 9) $x\leq 1$ 10) $0\leq x<1$ 11) $x>x_1$, con $-1<x_1<-0,5$ 12) $-1<x<x_2$, con $1,5<x_2<2$