## 14. DISEQUAZIONI FRATTE

Si risolvono come le disequazioni di grado superiore al secondo. Vale a dire:

**A) SI PORTA TUTTO A 1° MEMBRO, IN MODO CHE IL 2° MEMBRO SIA 0**
(si dovrà avere, in definitiva, un'unica frazione, confrontata con lo 0)

**B) poi SI SCOMPONGONO IN FATTORI SIA IL NUMERATORE. CHE IL DENOMINATORE**
(ciascun fattore dovrà essere di 1° grado, oppure di 2° grado, oppure di tipo "particolare": vedi es. 5)

**C)** quindi **SI STUDIA IL SEGNO DI CIASCUN FATTORE IN GIOCO** (NOTA)

NOTA. Sarebbe **gravissimo errore** mandar via il denominatore! Infatti ciò equivarrebbe a moltiplicare per il denominatore entrambi i membri, ma in una disequazione è lecito moltiplicare per un'espressione contenente $x$ soltanto se questa è sempre $>0,\ \forall x$

**D)** e infine **SI TRACCIA UNO SCHEMA PER IL CONFRONTO DEI SEGNI**
per trarre, dall'osservazione di questo, le conclusioni opportune.

**Esempio 1**: $\boxed{x\cdot\dfrac{2x-7}{x^2-4}<\dfrac{2}{x+2}}$

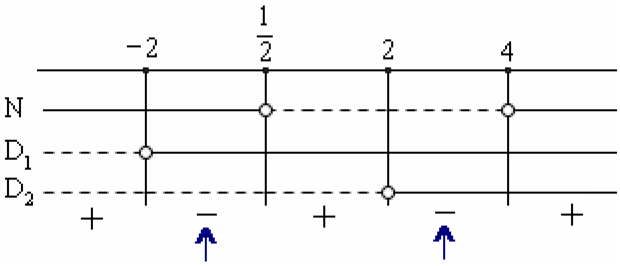
$$\frac{2x^2-7x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}<0\ ;\quad \frac{2x^2-7x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x+2}<0\ ;\quad \frac{2x^2-7x-2x+4}{(x+2)(x-2)}<0$$

$$\boxed{\frac{\overset{\text{N}}{2x^2-9x+4}}{\underset{\text{D}_1}{(x+2)}\underset{\text{D}_2}{(x-2)}}<0}$$

$\text{N}>0\quad 2x^2-9x+4>0\quad x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\dfrac{9\pm 7}{4}=\left\langle\begin{matrix}1/2\\4\end{matrix}\right.\quad \boxed{x<\dfrac{1}{2}\ \vee\ x>4}$

$\text{D}_1>0\quad x+2>0\quad \boxed{x>-2}$

$\text{D}_2>0\quad x-2>0\quad \boxed{x>2}$




SOLUZIONI: $\boxed{-2<x<\dfrac{1}{2}\ \vee\ 2<x<4}$

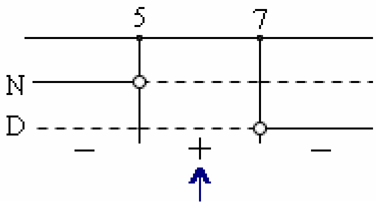
| | | |
|---|---|---|
| **LINEA CONTINUA** | —— | **FATTORE POSITIVO** |
| **PALLINO VUOTO** | ∘ | **FATTORE NULLO** |
| **LINEA TRATTEGGIATA** | - - - - | **FATTORE NEGATIVO** |

**Esempio 2:** (leggi il riquadro sottostante) $\boxed{\dfrac{\overset{\text{N}}{5-x}}{\underset{\text{D}}{x-7}}\ge 0}$

NOTA
Volendo, si potrebbe riscrivere come
$$\frac{x-5}{x-7}\le 0$$

$\text{N}>0\quad 5-x>0\quad -x>-5\quad \boxed{x<5}$

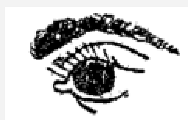
$\text{D}>0\quad x-7>0\quad \boxed{x>7}$




**SOLUZIONI:**
$\boxed{\begin{matrix}5\le x<7\\ S=[5,\,7)\end{matrix}}$

♥ **Nel caso si abbia il ≤, oppure il ≥, conviene pensare DAPPRIMA alla disequazione STRETTA (quella solo col > o col <), POI aggiungere alle soluzioni così trovate anche quei valori che rendono la frazione uguale a 0.**

♥ **Ricorda a proposito che una frazione si annulla quando si annulla il suo NUMERATORE, purché però non si annulli contemporaneamente anche il denominatore, nel qual caso la frazione non sarebbe nulla bensì indeterminata.**



$\dfrac{0}{a}=0$

$\dfrac{a}{0}=$ **IMPOSSIBILE**

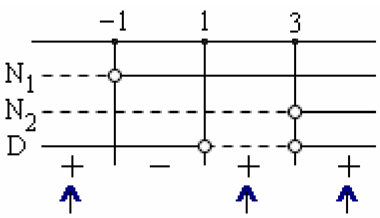
$\dfrac{0}{0}=$ **INDETERMINATA**

**Esempio 3:** $\boxed{\dfrac{\overset{N_1}{(x+1)^3}\,\overset{N_2}{(x-3)}}{\underset{D}{x^2-4x+3}}\ge 0}$

$N_1>0 \quad (x+1)^3>0 \quad x+1>0 \quad \boxed{x>-1}$

$N_2>0 \quad x-3>0 \quad \boxed{x>3}$

$D>0 \quad x^2-4x+3>0 \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1=\left\langle\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \quad \boxed{x<1 \vee x>3}$




**SOLUZIONI**:

$\boxed{x\le -1 \vee x>1 \; ma \; x\ne 3}$

La disequazione presenta il $\ge$.

La **disequazione "stretta"** $(>)$ è verificata per $x<-1 \vee 1<x<3 \vee x>3$.
L'**equazione** $(=)$ è verificata soltanto con $x=-1$,
valore che annulla il numeratore senza annullare il denominatore;
invece i valori $x=1$ e $x=3$ NON sono soluzioni dell'equazione:

- $x=1$ non lo è perché annulla il denominatore (frazione impossibile);
- $x=3$ non lo è perché, sebbene annulli il numeratore, annulla contemporaneamente anche il denominatore (frazione indeterminata).

Pertanto alle soluzioni della disequazione stretta andrà aggiunto il solo valore $x=-1$, e si otterrà in definitiva

$x\le -1 \;\vee\; 1<x<3 \;\vee\; x>3$ o anche: $\boxed{x\le -1 \vee x>1 \text{ ma } x\ne 3}$

OSSERVAZIONE

Risolviamo lo **stesso esercizio** diversamente, **scomponendo il denominatore in due fattori di 1° grado**:

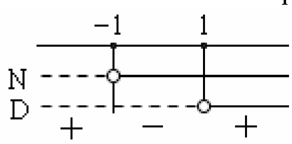
$\boxed{\dfrac{(x+1)^3(x-3)}{(x-1)(x-3)}\ge 0}$

Fattorizzando il denominatore, si nota la **possibilità di semplificare**.
Semplificando, però, viene eliminata l'espressione $(x-3)$ che inizialmente compariva a denominatore, quindi bisogna ricordarsi di **scrivere la condizione** $x\ne 3$, che significa: "se alla fine fra le soluzioni trovate dovesse rientrare anche il valore $x=3$, lo si dovrebbe escludere". Dunque:

$\dfrac{\overset{N}{(x+1)^3}\,\cancel{(x-3)}}{\underset{D}{(x-1)}\,\cancel{(x-3)}}\ge 0 \quad \boxed{x\ne 3}$

$N>0 \quad (x+1)^3>0 \quad x+1>0 \quad \boxed{x>-1}$

$D>0 \quad x-1>0 \quad \boxed{x>1}$

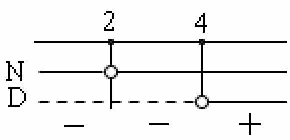



Tenuto conto ora del verso $(\ge)$ e della condizione $x\ne 3$, si hanno le **SOLUZIONI**:

$\boxed{x\le -1 \vee x>1 \text{ ma } x\ne 3}$

**Esempio 4:** a) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}<0}$ b) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}>0}$ c) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}\le 0}$ d) $\boxed{\dfrac{(x-2)^2}{x-4}\ge 0}$

Lo **schema finale** è, **in tutti e 4 i casi**, il seguente:




… e le **SOLUZIONI** sono, rispettivamente:

a) $\boxed{x<4 \text{ ma } x\ne 2}$ b) $\boxed{x>4}$

c) $\boxed{x<4}$ d) $\boxed{x>4 \;\vee\; x=2}$

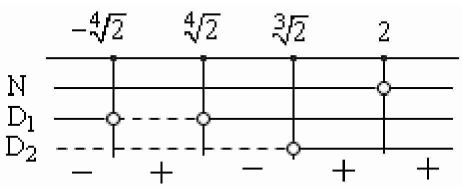
**Esempio 5:** $\boxed{\dfrac{\overset{N}{(x-2)^4}}{\underset{D_1}{(x^4-2)}\underset{D_2}{(x^3-2)}}\le 0}$

In questo caso i fattori in gioco non sono né di 1°, né di 2° grado; sono però "**di tipo particolare**", nel senso che, per ciascun fattore, se ne può agevolmente studiare il segno, mediante la disequazione ausiliaria *fattore>0*, senza ricorrere ad una … scomposizione del fattore in altri fattori di grado inferiore.

$N>0 \quad (x-2)^4>0 \quad x-2\ne 0 \quad \boxed{x\ne 2}$

$D_1>0 \quad x^4-2>0 \quad x^4>2 \quad |x|>\sqrt[4]{2} \quad \boxed{x<-\sqrt[4]{2} \;\vee\; x>\sqrt[4]{2}}$

$D_2>0 \quad x^3-2>0 \quad x^3>2 \quad \boxed{x>\sqrt[3]{2}}$




**SOL.:** $\boxed{x<-\sqrt[4]{2} \;\vee\; \sqrt[4]{2}<x<\sqrt[3]{2} \;\vee\; x=2}$