ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

1) $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$ (raccoglimenti parziali) 2) $(x+3)(x-2)(x^2+7) \ge 0$

3) $4x^3 + x^2 - 12x - 3 < 0$ (raccoglimenti parziali) 4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$ (Ruffini)

5) $\frac{6}{5}(4x+1)(3x+1)(2x+1)^2 \le 0$ 6a) $(x-5)^2(x-2) > 0$ 6b) $(x-5)^2(x-2) \le 0$

7) $x(2x^2 - 10x + 1) < 5$ 8) $x^3 + x^2 + 2x + 2 > 0$ 9) $a^3 - a^2 \ge 0$ 10) $(x-1)(x^2 - x + 1) < 0$

11a) $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$ 11b) $x^3 - 3x^2 + 2x \ge 0$ 11c) $x^4 + 2x^2 > 3x^3$ 11d) $x^4 + 2x^2 \ge 3x^3$

12a) $x^3 - 4x > 0$ 12b) $x^3 - 4x \ge 0$ 13) $5x(x+2)^2(x^2+2)(x^2-2x-4)(x^2-2x+4) < 0$

14a) $4x^2 < x^4$ 14b) $4x^2 \le x^4$ 14c) $4x^2 > x^4$ 14d) $4x^2 \ge x^4$ 15) $y^4 - y^3 \ge 0$

16) $(x^2+3)(x+2)^2(x-1) < 0$ 17) $(x-1)(x-2)^2(x-3)(4x^2+1) < 0$ 18) $x^3(x^2-2x-1) < 0$

19) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$ Le disequazioni BIQUADRATICHE non fanno eccezione: si risolvono anch'esse SCOMPONENDO IN FATTORI 20) $4x^4 - 5x^2 + 1 \le 0$

21) $\frac{11}{12}x^2 > \frac{x^4}{3} + \frac{1}{2}$ Si può moltiplicare per 12 oppure fare il den. com. 12 e mandarlo via 22) $y^4 - \frac{7}{2}y^2 - 2 > 0$ 23) $21t^2 + 25 > 4t^4$

24) $16b^4 - 148b^2 + 36 > 0$ (semplifica innanzitutto i coefficienti!) 25) $x^4 + 7x^2 + 12 > 0$

26) $x^4 - 3x^2 + 4 > 0$ (molto particolare!) 27) $x^6 - x^3 - 6 < 0$ 28) $x^8 - 6x^4 + 5 < 0$

29) $x^8 - 15x^4 - 16 > 0$ 30) $x^8 - 3x^4 < 0$ 31) $3x^4(1-5x)(4x^2+11x-3)(2x^2-1)(x^2+1)(x+1)^2 < 0$

SOLUZIONI

1) $x < -2 \vee 1 < x < 2$ 2) $x \le -3 \vee x \ge 2$ 3) $x < -\sqrt{3} \vee -1/4 < x < \sqrt{3}$ 4) $1 < x < 2 \vee x > 3$

5) $-1/3 \le x \le -1/4 \vee x = -1/2$ Il fattore 6/5 è >0 e può essere semplificato … 6a) $x > 2$ ma $x \ne 5$ 6b) $x \le 2 \vee x = 5$

7) Raccoglimenti parziali; si ottiene $(x-5)(2x^2+1) < 0$ e a questo punto,
se si nota che il fattore $2x^2+1$ è >0 qualunque sia x, lo si potrà eliminare: $(x-5)\cancel{(2x^2+1)} < 0$
e la disequazione diventerà allora semplicemente $x - 5 < 0$ con le soluzioni $x < 5$.
Se invece NON si elimina il fattore $2x^2+1$, essendo questo sempre >0, nello schema finale ad esso corrisponderà una linea continua di positività e si troveranno le stesse soluzioni, ossia i valori $x < 5$.

8) $x > -1$ 9) $a \ge 1 \vee a = 0$ 10) $x < 1$ (il fattore $x^2 - x + 1$, con $\Delta < 0$, è sempre > 0, per ogni x!)

11a) $0 < x < 1 \vee x > 2$ 11b) $0 \le x \le 1 \vee x \ge 2$ 11c) $x < 1\ (ma\ x \ne 0) \vee x > 2$ 11d) $x \le 1 \vee x \ge 2$

12a) $-2 < x < 0 \vee x > 2$ 12b) $-2 \le x \le 0 \vee x \ge 2$ 13) $x < 1 - \sqrt{5}\ (ma\ x \ne -2) \vee 0 < x < 1 + \sqrt{5}$

14a) $x < -2 \vee x > 2$ 14b) $x \le -2 \vee x \ge 2 \vee x = 0$ 14c) $-2 < x < 2\ ma\ x \ne 0$ 14d) $-2 \le x \le 2$

15) $y \le 0 \vee y \ge 1$ 16) $x < 1\ ma\ x \ne -2$ 17) $1 < x < 3\ ma\ x \ne 2$ 18) $x < 1 - \sqrt{2} \vee 0 < x < 1 + \sqrt{2}$

19) $x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$ 20) $-1 \le x \le -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \le x \le 1$ 21) $-\sqrt{2} < x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{2}$

22) $y < -2 \vee y > 2$ 23) $-5/2 < t < 5/2$ 24) $b < -3 \vee -1/2 < b < 1/2 \vee b > 3$ 25) $\forall x \in \mathbb{R}$

26) $\forall x \in \mathbb{R}$ Il trinomio biquadratico dato non è scomponibile perché il suo Δ è negativo; la negatività del Δ ci dice anche che l'equazione biquadratica associata non ha soluzioni, cioè che il trinomio non si può annullare; ma allora la quantità $x^4 - 3x^2 + 4$ mantiene segno costante, e siccome ad esempio con $x = 0$ è positiva, si manterrà positiva per ogni valore di x

27) Si scompone in $(x^3+2)(x^3-3)$, dopodiché:
$x^3 + 2 > 0;\ x^3 > -2;\ x > \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, ecc.
Soluzioni: $-\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{3}$

28) Si scompone in $(x^4-5)(x^4-1)$, dopodiché:
$x^4 - 5 > 0;\ x^4 > 5;\ |x| > \sqrt[4]{5};\ x < -\sqrt[4]{5} \vee x > \sqrt[4]{5}$, ecc.
Soluzioni: $-\sqrt[4]{5} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt[4]{5}$

29) $x < -2 \vee x > 2$ 30) $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}\ ma\ x \ne 0$ 31) $-3 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\ (ma\ x \ne -1) \vee \frac{1}{5} < x < \frac{1}{4} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$