15. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

L'obiettivo di un **sistema** (di equazioni, di disequazioni, misto)
è sempre di determinare per quali valori dell'incognita, o delle incognite,
sono verificate **CONTEMPORANEAMENTE TUTTE** le condizioni che compongono il sistema.

Per risolvere un sistema di disequazioni,

A) PRIMA SI RISOLVERA' SEPARATAMENTE OGNI SINGOLA DISEQUAZIONE;

B) POI si traccerà uno SCHEMA "DI INTERSEZIONE",
che mostri in un quadro "sinottico" per quali valori è verificata ciascuna disequazione
e permetta così di stabilire per quali valori sono verificate contemporaneamente tutte.

Esempio 1:

$$\boxed{\begin{cases} (x-4)^2 \le x^2 \\ \dfrac{x-1}{x-4} \le 0 \end{cases}}$$

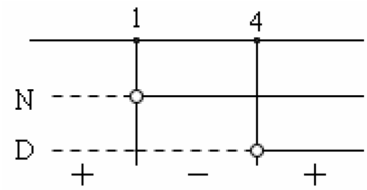
NOTA
Due differenze fondamentali fra i sistemi di DISEQuazioni e i sistemi di EQuazioni:
1) *in un sistema di disequazioni abbiamo UNA SOLA incognita*
(disequazioni in più incognite, e sistemi con esse, si incontrano in determinati contesti, e si affrontano in generale con metodi grafici, ma noi qui non ce ne occuperemo)
2) *in un sistema di disequazioni, queste non vengono fatte "interagire" fra loro, ma, come abbiamo detto, le si risolve separatamente, una per una.*

1ª disequazione:

$$(x-4)^2 \le x^2 \quad \cancel{x^2} - 8x + 16 \le \cancel{x^2} \quad -8x \le -16 \quad 8x \ge 16 \quad \boxed{x \ge 2} \quad \textbf{1ª diseq.} \quad S_1 = [2, +\infty)$$

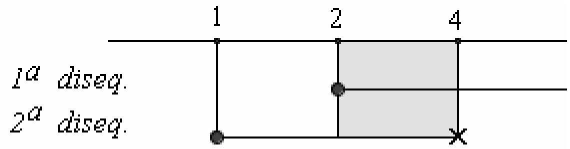
2ª disequazione:

$$\overset{\text{N}}{\underset{\text{D}}{\frac{x-1}{x-4}}} \le 0 \qquad \begin{matrix} \text{N} > 0 & x-1>0 & x>1 \\ \text{D}>0 & x-4>0 & x>4 \end{matrix}$$



$\boxed{1 \le x < 4}$ **2ª diseq.**
$S_2 = [1, 4)$

SCHEMA DI SISTEMA (= SCHEMA DI INTERSEZIONE):



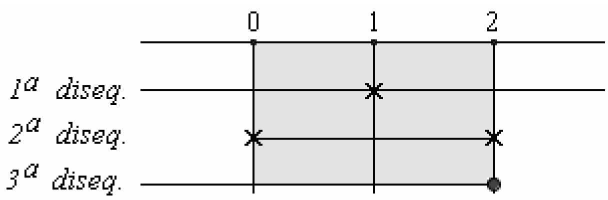
SOLUZIONI DEL SISTEMA:
$\boxed{2 \le x < 4}$
$S = S_1 \cap S_2 = [2, 4)$

♥ **SIMBOLOGIA IN UNO SCHEMA DI SISTEMA:**
linea continua, pallino pieno
DISEQUAZIONE VERIFICATA
nessuna linea, crocetta di esclusione
DISEQUAZIONE NON VERIFICATA

Uno schema di sistema è anche chiamato "**schema di intersezione**": infatti l'insieme S delle soluzioni del sistema costituisce l'intersezione fra gli insiemi S_1, S_2, … delle soluzioni delle singole condizioni che compongono il sistema.

Esempio 2:

$$\boxed{\begin{cases} (x-1)^4 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \\ (x-2)^3 \le 0 \end{cases}}$$



1ª disequazione:
$(x-1)^4 > 0 \quad x \ne 1$

2ª disequazione:
$x^2 - 2x < 0 \quad x(x-2) < 0 \quad 0 < x < 2$

3ª disequazione:
$(x-2)^3 \le 0 \quad x - 2 \le 0 \quad x \le 2$

SOLUZIONI SISTEMA:
$\boxed{0 < x < 2 \ \text{ ma } \ x \ne 1}$

In forma insiemistica:

$S_1 = \mathbb{R} - \{1\}$ *opp.* $(-\infty, +\infty) - \{1\}$ *opp.* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$S_2 = (0, 2)$

$S_3 = (-\infty, 2]$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (0,2) - \{1\}$ *oppure* $(0,1) \cup (1,2)$

OSSERVAZIONI UTILI

- **Se**, nell'ambito di un sistema, si nota che
  due delle condizioni sono "INCOMPATIBILI" fra loro,
  ossia: **non possono essere verificate contemporaneamente,**
  allora si può immediatamente concludere che **il sistema è impossibile**.

  Es. $\begin{cases} x>6 \\ 1<x<8 \\ x<4 \end{cases}$ *La prima e la terza condizione sono in contraddizione fra loro, sono incompatibili: non c'è alcun valore di x che le possa soddisfare entrambe simultaneamente. Il sistema è impossibile.*

- **La presenza anche di una sola condizione IMPOSSIBILE,**
  rende impossibile tutto il sistema.

  Es. $\begin{cases} x^2-4x<0 \\ x^2>8x+7 \\ x^2+1<0 \end{cases}$ *Si vede subito che la terza condizione è impossibile. Non perdiamo tempo: il sistema è impossibile.*

- **Invece una condizione SEMPRE VERIFICATA** ($\forall x \in \mathbb{R}$)
  non pone alcun vincolo all'incognita,
  e di conseguenza **è irrilevante nell'ambito del sistema: essa può essere, volendo, eliminata**
  (se comunque la si tiene, nello schema finale ad essa corrisponderà una linea continua
  di "condizione sempre verificata", e tale linea continua sarà, ovviamente, ininfluente).

  Es. $\begin{cases} x^2>9 \\ 3(x+1)>4(x-1) \\ x^2+1>0 \end{cases}$ *Si vede subito che la terza condizione è sempre verificata. Essa è allora irrilevante: se vogliamo, possiamo eliminarla dal sistema, e le soluzioni di questo non cambieranno.*

- **Sovente lo "schema di intersezione" è superfluo**, perché (almeno in situazioni semplici)
  può essere rimpiazzato da considerazioni elementari, che si possono fare a mente.

  ♪ Ad esempio, è subito evidente che il sistema $\begin{cases} x>2 \\ x<5 \end{cases}$ ha come soluzioni: $2<x<5$

  ♫ **FRA DUE O PIÙ CONDIZIONI "EQUIVERSE", PREVALE LA PIÙ RESTRITTIVA**,
  ossia quella che lascia all'incognita minore "libertà":

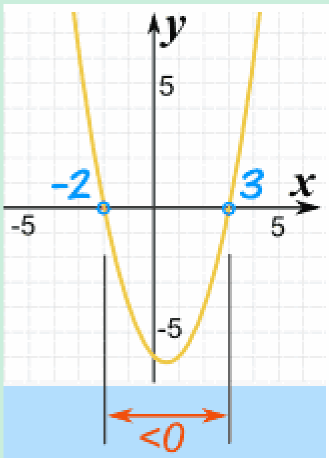
  $\begin{cases} x>1 \\ x>4 \\ x>7 \end{cases} \Leftrightarrow x>7$ *Fra le tre condizioni con lo stesso verso, la più "restrittiva", quella che lascia meno libertà a x, è la x>7, che "obbliga" x a stare "a destra del 7". Ciascuna delle altre due lascia a disposizione di x un piccolo spazio in più.*

  $\begin{cases} x>0 & * \\ x<2 & ** \\ x>1 & * \\ x<3 & ** \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 & * \\ x<2 & ** \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$

DISEQUAZIONI SU INTERNET

♪ Dal sito www.themathpage.com del professor Lawrence Spector:
INEQUALITIES ⇨
(The number line, "Or" versus "and", … , Solving inequalities)

♫ Dal sito www.mathsisfun.com
(da cui è tratta l'immagine qui a fianco):
SOLVING QUADRATIC INEQUALITIES ⇨



ESERCIZI SUI SISTEMI DI DISEQUAZIONI

1) $\begin{cases} x^2 < 3x \\ 2x \ge x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+5} < 0 \\ x^2 \le x(x+1) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 < 2x-3 \\ x^2 < 3x-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 > x+6 \\ 3(x-1) < 3x-2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x-1} \ge 1 \\ 7x \ge x^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 > x+2 \\ \dfrac{x-7}{x} \le 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} < \dfrac{x}{3} \\ 3(x+2) < 5x \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 \ge 4 \\ 2x < x+3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x \le 5 \\ x < 5 \\ x \le 4 \\ x < 4 \\ x \ge 1 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x \ge 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{4-x}{x} \ge 0 \\ \dfrac{6-x}{2-x} \le 0 \end{cases}$ $\boxed{\dfrac{4-x}{x} \ge 0}$ si può riscrivere, se si preferisce, come $-\dfrac{x-4}{x} \ge 0$ e quindi come $\boxed{\dfrac{x-4}{x} \le 0}$

$\boxed{\dfrac{6-x}{2-x} \le 0}$ si può riscrivere, volendo, come $\boxed{\dfrac{x-6}{x-2} \le 0}$ perché se si cambiano simultaneamente di segno sia il numeratore che il denominatore, una frazione non varia

12) $\begin{cases} 2x^2 < 2x+3 \\ 2x-1 > \dfrac{x}{3} \end{cases}$ 13) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-1} < 0 \\ x^2-9 > 0 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 2x+1 \ge 3x-1 \\ x \le 2(x+2) \\ x^2+3x < 10 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{x-6} \le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x} \le 0 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x^4 > 2x^3 \\ \dfrac{x^3-4}{x^4-4} < 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 16x^4+3 > 0 \\ 16x^4-3 \ge 0 \\ 3x^4+16 > 16x^2 \\ \dfrac{1}{x^2} \ge 0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{7-x} \le 0 \\ \dfrac{4x}{x+4} \le 0 \end{cases}$ 19) $\begin{cases} 8x^6-7x^3-1 > 0 \\ x^4\left(16x^4+15\right) \ge 1 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 2x^2+3 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \\ 2x < 2x^2+4 \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2+2 \ge 3x \\ 1 \ge \dfrac{x}{2} \\ 2x^2+1 > x \end{cases}$

SOLUZIONI

1) $\boxed{2 \le x < 3}$ 2) $\boxed{0 \le x < 5}$ 3) $\boxed{\text{imposs.}}$ 4) $\boxed{x < -2 \vee x > 3}$ 5) $\boxed{0 \le x < 1 \vee 4 \le x \le 7}$ 6) $\boxed{2 < x \le 7}$

7) $\boxed{\begin{matrix} 3 < x < 9: \\ S = (3,\,9) \end{matrix}}$ 8) $\boxed{\begin{matrix} x \le -2 \ \vee\ 2 \le x < 3: \\ S = (-\infty,\,-2] \cup [2,\,3) \end{matrix}}$ 9) $\boxed{1 \le x < 4}$ 10) $\boxed{x \ge 1}$

11) $\boxed{2 < x \le 4}$ 12) $\boxed{\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}}$ 13) $\boxed{3 < x < 5}$ 14) $\boxed{-4 \le x < 2}$

15) 1^a *diseq.*: $-1 \le x < 6$ $S_1 = [-1,\,6)$

2^a *diseq.*: $x \le -1 \ \vee\ 0 < x \le 1$ $S_2 = (-\infty,\,-1] \cup (0,\,1]$

Sistema: $\boxed{\begin{matrix} x = -1 \vee 0 < x \le 1 \\ S = S_1 \cap S_2 = \{-1\} \cup (0,1] \end{matrix}}$

16) 1^a *diseq.*: $x < 0 \vee x > 2$

2^a *diseq.*: $x < -\sqrt{2} \ \vee\ \sqrt{2} < x < \sqrt[3]{4}$

Sistema: $\boxed{\begin{matrix} x < -\sqrt{2} \\ S = (-\infty, -\sqrt{2}) \end{matrix}}$

17) 1^a *diseq.*: $\forall x \in \mathbb{R}$ 2^a *diseq.*: $x \le -\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2} \vee x \ge \dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

3^a *diseq.*: $x < -2 \vee -\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \vee x > 2$ 4^a *diseq.*: $x \ne 0$

Sistema: $\boxed{S = (-\infty,-2) \cup \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup (2,+\infty)}$

18) 1^a *diseq.*: $x \le 3 \vee x > 7$

2^a *diseq.*: $-4 < x \le 0$

Sistema: $\boxed{-4 < x \le 0:\ S = (-4,\,0]}$

19) 1^a *diseq.*: $x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1$

2^a *diseq.*: $x \le -\dfrac{1}{2} \vee x \ge \dfrac{1}{2}$

Sistema: $\boxed{\begin{matrix} x < -\dfrac{1}{2} \vee x > 1 \\ S = \left(-\infty,\,-\dfrac{1}{2}\right) \cup (1,\,+\infty) \end{matrix}}$

20) $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \ne 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} \textit{Sistema}: x \ne 2 \\ S = \mathbb{R} - \{2\} = \\ = (-\infty,\,+\infty) - \{2\} = \\ = (-\infty,\,2) \cup (2,\,+\infty) \end{matrix}}$

21) $\begin{cases} x \le 1 \vee x \ge 2 \\ x \le 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} \textit{Sistema}: x \le 1 \vee x = 2 \\ S = (-\infty,\,1] \cup \{2\} \end{matrix}}$