43)

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\geq 0 \\ =0\ solo \\ per\ x=1}} + \underbrace{(x-2)^2}_{\substack{\geq 0 \\ =0\ solo \\ per\ x=2}} > 0$$

Elevando qualsiasi numero reale al quadrato
(e in un contesto di disuguaglianze e disequazioni
i numeri *complessi* sono *esclusi a priori*)
si ottiene sempre un risultato non negativo, $\geq 0$:
per la precisione

- il risultato dell'elevamento al quadrato è proprio 0 se e solo se è =0 la base,
- altrimenti il risultato sarà >0.

Allora **una *somma* di due quadrati è *quasi sempre* >0,**
**e potrà essere =0 solo ed unicamente nel caso in cui**
**siano =0 le basi di *entrambi* i quadrati *simultaneamente*.**

**Nel nostro esercizio ciò non può avvenire**, perché

- la prima base si annulla solo quando $x=1$,
- la seconda solo quando $x=2$

per cui non esiste nessun valore di *x* per il quale
le due basi, e quindi i due quadrati, si annullino contemporaneamente.

In definitiva **la nostra disequazione è verificata SEMPRE,** $\forall x$ **.**

44)

$(x-1)^3 + (x-2)^3 > 0$

$(x-1)^3 > -(x-2)^3$

$(x-1)^3 > (2-x)^3$

Ricordiamo che in una disequazione è SEMPRE lecito
estrarre le radici con lo stesso indice DISPARI
di entrambi i membri, indipendentemente dal segno di questi.

Allora:

$\sqrt[3]{(x-1)^3} > \sqrt[3]{(2-x)^3}$

$x-1 > 2-x$

(sappiamo che con indice dispari
NON va fatto intervenire il valore assoluto nel risultato)

$2x > 3$

$x > \dfrac{3}{2}$

45)

$$\underbrace{(x+1)^2}_{\substack{\geq 0 \\ =0\ solo \\ per\ x=-1}} + \underbrace{(x^2-1)^2}_{\substack{\geq 0 \\ =0\ solo \\ per\ x=\pm 1}} \leq 0$$

Elevando qualsiasi numero reale al quadrato
si ottiene sempre un risultato non negativo, $\geq 0$:
precisamente,

- il risultato dell'elevamento al quadrato è proprio 0 se e solo se è =0 la base,
- altrimenti il risultato sarà >0.

Allora una *somma* di due quadrati non può mai essere <0
(quindi diciamo che la "disequazione col <" è *impossibile*, non ha soluzioni),
e potrà essere =0 solo ed unicamente nel caso in cui
siano =0 le basi di *entrambi* i quadrati *simultaneamente*.

Nel nostro esercizio

- la prima base, e quindi il primo quadrato, si annulla quando $x=-1$,
- la seconda quando $x=-1 \vee x=1$

perciò le due basi, e quindi i due quadrati, si annullano contemporaneamente per $x=-1$
e questo valore è dunque l'unica soluzione della disequazione proposta.

54)

$(4x+1)^4 < 3$

In una disequazione si possono estrarre le radici con indice PARI
dei due membri SOLO nel caso in cui questi siano *entrambi* $\geq 0\ \forall x$ ...
... ora, in questo esercizio tale condizione è appunto soddisfatta.

Allora:

$$\sqrt[4]{(4x+1)^4} < \sqrt[4]{3}$$

$$|4x+1| < \sqrt[4]{3} \quad \left(\text{ricordiamo che } \sqrt[4]{a^4} = |a|\right)$$

Ora, il valore assoluto di un numero esprime
la distanza dall'origine del punto che, sulla *number line*,
corrisponde a quel numero.

E detta $p$ una qualunque costante positiva, si ha perciò

$$|t| < p$$

se e solo se

$$-p < t < p$$

Quindi

$$|4x+1| < \sqrt[4]{3}$$

equivale a

$$-\sqrt[4]{3} < 4x+1 < \sqrt[4]{3}$$

Sottraiamo 1 da tutti gli anelli della catena:

$$-\sqrt[4]{3} - 1 < 4x < \sqrt[4]{3} - 1$$

Dividiamo tutto per 4:

$$\underbrace{\frac{-\sqrt[4]{3}-1}{4}}_{-\frac{\sqrt[4]{3}+1}{4}} < x < \frac{\sqrt[4]{3}-1}{4}$$

55)

$(1-x)^6 < 64$

In una disequazione si possono estrarre le radici con indice PARI
dei due membri SOLO nel caso in cui questi siano entrambi $\geq 0\ \forall x$ ...
... ora, in questo esercizio tale condizione è appunto soddisfatta.
Allora:

$\sqrt[6]{(1-x)^6} < \sqrt[6]{64}$

$|1-x| < 2$ $\left(\text{ricordiamo che } \sqrt[6]{a^6} = |a|\right)$

$-2 < 1-x < 2$

Sottraiamo 1 da tutti gli anelli della catena:

$-3 < -x < 1$

Cambiamo segni e verso:

$3 > x > -1$

Riscriviamo da destra a sinistra:

$-1 < x < 3$

OSSERVAZIONE
I passaggi finali sarebbero stati un poco più brevi
se avessimo tenuto conto che

$|1-x| = |x-1|$ (due numeri fra loro opposti hanno ugual valore assoluto)

Allora la

$|1-x| < 2$

avrebbe potuto essere riscritta come

$|x-1| < 2$ (col vantaggio di avere $x$ anziché $-x$)

da cui

$-2 < x-1 < 2$

e addizionando 1 dappertutto

$-1 < x < 3$

56)

$(4x-3)^4 > 81$

In una disequazione si possono estrarre le radici con indice PARI
dei due membri SOLO nel caso in cui questi siano entrambi $\geq 0\ \forall x$ ...
... ora, in questo esercizio tale condizione è appunto soddisfatta.

Allora: $\sqrt[4]{(4x-3)^4} > \sqrt[4]{81}$

$|4x-3| > 3$ $\left(\text{ricordiamo che } \sqrt[4]{a^4} = |a|\right)$

Ora, il valore assoluto di un numero esprime
la distanza dal'origine del punto che, sulla number line,
corrisponde a quel numero.

E detta $p$ una qualunque costante positiva, si ha $|t| > p$

se e solo se $t < -p \ \vee \ t > p$

Quindi

$4x-3 < -3 \ \vee \ 4x-3 > 3$

$4x < 0 \ \vee \ 4x > 6$

$x < 0 \ \vee \ x > \frac{3}{2}$