EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI O COL VALORE ASSOLUTO

A) LE EQUAZIONI IRRAZIONALI E LE CONDIZIONI "A PRIORI"

Riprendiamo ora il discorso sulle equazioni irrazionali, avviato nel Volume 2 alle pagine 80 e seguenti.

a) Abbiamo detto che sono così chiamate quelle equaz. che portano almeno una volta *l'incognita sotto radice*

b) abbiamo visto che esse *si risolvono elevando una o più volte a potenza*

c) ma abbiamo osservato che **quando si eleva ad esponente *pari* il passaggio potrebbe introdurre (non sempre lo fa, ma *a volte* lo fa) una o più "false soluzioni", "soluzioni non accettabili"**
(*se due numeri sono uguali, allora elevandoli ad uno stesso esponente si otterranno ancora numeri uguali; ma se i risultati dell'elevamento ad uno stesso esponente PARI di due numeri sono uguali, i due numeri in questione non sono necessariamente uguali: potrebbero anche essere opposti*)

d) e abbiamo raccomandato dunque, **per le equazioni irrazionali risolte elevando almeno una volta ad esponente pari**, di **sottoporre ciascuna soluzione che si trova alla fine alla "verifica di accettabilità",** ***sostituendola* nell'equaz. *di partenza* per controllare se rende l'uguaglianza iniziale vera oppure no**.

Dunque fra le soluzioni dell'equaz. elevata ad esp. pari, *soltanto* quelle che superano il "test *a posteriori* di accettabilità" sono anche soluzioni dell'equazione di partenza, *mentre* le altre vengono *scartate*.

Ci domandiamo ora: ma sarà possibile, come si è soliti fare per una equazione *fratta*, stabilire anche per un'equazione irrazionale nella quale si eleva ad esponente *pari* delle "condizioni di accettabilità *a priori* ", cosicché le soluzioni trovate alla fine possano essere riconosciute come accettabili o non accettabili *semplicemente* andando a vedere se verificano o non verificano tali condizioni, *senza* stare a fare la sostituzione nell'equazione iniziale?

La **risposta** è **affermativa, almeno per i casi più semplici**. Vediamo.

Di fronte, ad esempio, all'equazione $\boxed{(1)\ \ \sqrt{5-x}=x-3}$
cosa possiamo dire, fin dall'inizio, sul numero incognito x?
Beh, se un dato valore di x è soluzione di (1),
allora certamente x renderà eseguibile l'estrazione di radice restando in campo reale
(salvo esplicito avviso contrario, non si sconfina mai in campo complesso), quindi sarà $5-x\ge 0$.
Non solo: x sarà anche tale che $x-3\ge 0$, perché rende il valore di $x-3$ uguale al risultato
di un'estrazione di radice quadrata, risultato che come sappiamo è per convenzione sempre ≥ 0 .
Inoltre, **se un'uguaglianza è vera, sarà vera anche quell'uguaglianza che si ottiene elevando al quadrato ambo i membri della prima**, quindi x verificherà pure l'equazione $5-x=(x-3)^2$

Pertanto, se x è soluzione di (1), allora x sarà soluzione pure del sistema $\boxed{(2)\ \ \begin{cases}5-x\ge 0\\ x-3\ge 0\\ 5-x=(x-3)^2\end{cases}}$.

E viceversa, se un dato valore di x è soluzione di (2), allora lo stesso valore di x è soluzione anche di (1):
infatti, se x verifica (2), allora in particolare x sarà tale da rendere vera l'uguaglianza $5-x=(x-3)^2$;
ma **se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI** (e quella in gioco è certamente tale, perché il 2° membro, in quanto quadrato, è *senz'altro* positivo) **allora vale sicuramente anche l'uguaglianza ottenibile estraendo le radici quadrate**, quindi la $\sqrt{5-x}=\sqrt{(x-3)^2}$ ossia la $\sqrt{5-x}=|x-3|$ che però,
in virtù della seconda condizione del sistema, equivale a $\sqrt{5-x}=x-3$ ossia alla (1).
Insomma, (1) e (2) si implicano vicendevolmente, si bi-implicano, sono *equivalenti*.
Si può anche osservare che, nell'ambito del sistema (2), la condizione $5-x\ge 0$ è *superflua* e si può eliminare, perché è *conseguenza dell'ultima condizione*: infatti, se è $5-x=(x-3)^2$, allora è SENZ'ALTRO $5-x\ge 0$
(un'espressione uguale ad un quadrato è certamente non negativa, come lo è il quadrato).

Allora il sistema (2) può ridursi a $\begin{cases}\cancel{5-x\ge 0}\\ x-3\ge 0\\ 5-x=(x-3)^2\end{cases}$ e in definitiva scopriamo che

l'equazione $\sqrt{5-x}=x-3$ equivale al sistema $\begin{cases}x-3\ge 0 & \text{condizione di positività del 2° membro}\\ 5-x=(x-3)^2 & \text{condizione ottenibile elevando al quadrato}\end{cases}$

e che quindi le soluzioni di (1) sono quelle, fra le soluzioni dell'equazione ottenibile elevando al quadrato la (1), che soddisfano *anche* alla condizione di positività (*positività in senso lato*, cioè *non-negatività*) del 2° membro.

Riassumendo, questo discorso ci ha portato a stabilire che
per risolvere la (1) basterà porre la condizione di positività del suo 2° membro e poi elevare al quadrato.

Quindi, di fronte alla

$$\sqrt{\mathbf{5-x}}=\mathbf{x-3},$$

noi, sapendo che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x-3\ge 0 & \text{condizione di positività del 2° membro} \\ 5-x=(x-3)^2 & \text{condizione ottenibile elevando al quadrato} \end{cases}$$

facciamo, nella pratica, così:

a) **poniamo la condizione di positività del secondo membro** $\boxed{x-3\ge 0,\ \mathbf{x\ge 3}}$;

b) **poi eleviamo al quadrato** ottenendo $\boxed{\mathbf{5-x=(x-3)^2}}$, che risolveremo **con il proposito di considerare alla fine accettabili, fra le soluzioni, solo quelle che risulteranno ≥ 3.**

$$5-x=(x-3)^2$$
$$5-x=x^2-6x+9$$
$$-x^2+5x-4=0$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$\cancel{x=1} \quad \vee \quad \boxed{x=4}$$

non accettabile!
Non è ≥ 3!!!

Verifica tu stesso, per esercizio,
sostituendo nell'equazione data inizialmente,
che $x=4$ ne è soluzione
mentre $x=1$ NON ne è soluzione
(non rende i due membri uguali, bensì li rende opposti fra loro).

Generalizziamo.

Un'equazione della forma

$$\textbf{(*)}\quad \sqrt{\mathrm{A}(x)}=\mathrm{B}(x)$$

può essere risolta ponendo la condizione $\mathrm{B}(x)\ge 0$ di positività del 2° membro
e poi elevando al quadrato, in quanto è equivalente al sistema

$$\textbf{(**)}\quad \begin{cases} \cancel{\mathrm{A}(x)\ge 0} \\ \mathrm{B}(x)\ge 0 \\ \mathrm{A}(x)=[\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}$$

nel quale la condizione $\mathrm{A}(x)\ge 0$ può essere cancellata
(se ce la teniamo, non sbagliamo; tuttavia la condizione è sovrabbondante, superflua, inutile)
perché è *implicita* (NOTA) nella terza.

L'equivalenza fra l'equazione (*) e il sistema (**) può essere provata constatando che

(*) $\Rightarrow$ (**) , cioè: se un certo x è soluzione di (*), allora lo stesso x è soluzione anche di (**), perché

- se un'espressione è uguale al risultato di una radice quadrata, allora è certamente ≥ 0;
- e se vale un'uguaglianza, allora è vera anche quella che si ottiene elevandone i due membri al quadrato;

e viceversa

(**) $\Rightarrow$ (*) , cioè: se un certo x è soluzione di (**), allora lo stesso x è soluzione anche di (*), perché se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI, allora è vera anche quella che si ottiene estraendo le radici quadrate dei suoi due membri; e in generale si ha $\sqrt{[\mathrm{B}(x)]^2}=|\mathrm{B}(x)|$, ma quando è, come nel nostro caso, $\mathrm{B}(x)\ge 0$, allora si ha più semplicemente $\sqrt{[\mathrm{B}(x)]^2}=\mathrm{B}(x)$.

Saranno dunque soluzioni di (*) quelle, fra le soluzioni dell'equazione ottenibile elevando al quadrato, che soddisfano alla condizione $\mathrm{B}(x)\ge 0$ di positività del 2° membro.

NOTA

"Implicita" significa "contenuta, seppure nascostamente; sottintesa come conseguenza automatica". Ad esempio, se una signora, conversando con un'amica, parla del suo "primo marito", è *implicito* che ne ha avuti almeno due; se parlo di "minimo comune multiplo fra due numeri", è *implicito* che mi sto riferendo a numeri interi.
Nel nostro caso, la condizione $\mathrm{A}(x)\ge 0$ è implicita nella terza condizione del sistema, perché se $\mathrm{A}(x)$ è uguale ad un quadrato, allora *necessariamente* è $\mathrm{A}(x)\ge 0$.

CASI PARTICOLARI

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} = \mathrm{p} \quad (\mathrm{p} \in \mathbb{R},\ \mathrm{p}>0)$$

Qui il 2° membro è una costante positiva: ***si può elevare al quadrato senza porre alcuna condizione.***

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} = -\mathrm{p} \quad (\mathrm{p} \in \mathbb{R},\ \mathrm{p}>0)$$

Qui il 2° membro è una costante negativa.
L'equazione è impossibile**: il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo.**

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} = 0$$

L'equazione è equivalente a $\mathrm{A}(x) = 0$:
una radice quadrata ha risultato nullo se e solo se il suo radicando è nullo.

E vediamo ora un altro caso notevole; presenteremo, questa volta, subito il ragionamento teorico generale.

Un'equazione della forma

(*) $\sqrt{\mathrm{A}(x)} = \sqrt{\mathrm{B}(x)}$

può essere risolta ponendo le condizioni $\mathrm{A}(x) \ge 0,\ \mathrm{B}(x) \ge 0$ di positività dei due membri
e poi elevando al quadrato, perché è equivalente al sistema

$$(**)\ \begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x) \end{cases}$$

nel quale fra le due condizioni $\mathrm{A}(x) \ge 0,\ \mathrm{B}(x) \ge 0$, una qualsiasi potrebbe essere cancellata
(se ce la teniamo, non sbagliamo, tuttavia la condizione è sovrabbondante, superflua, inutile)
in quanto è *implicita* nelle altre due condizioni del sistema.

L'equivalenza fra l'equazione (*) e il sistema (**) può essere provata constatando che

$(*) \Rightarrow (**)$, cioè: se un certo x è soluzione di (*), allora lo stesso x è soluzione anche di (**), perché

- se vale un'uguaglianza fra radici quadrate con l'intesa di restare in campo reale, allora entrambe sono estraibili in campo reale quindi hanno radicando positivo;
- e se vale un'uguaglianza, allora è vera anche l'uguaglianza che si ottiene elevandone i due membri al quadrato;

e viceversa

$(**) \Rightarrow (*)$, cioè: se un certo x è soluzione di (**), allora lo stesso x è soluzione anche di (*)
perché se vale un'uguaglianza fra numeri POSITIVI, allora è vera anche
quella che si ottiene estraendo le radici quadrate dei suoi due membri.

Esempio.

$$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{2x-2}$$

Pongo le condizioni di realtà dei radicali $x^2-5 \ge 0,\ 2x-2 \ge 0$;
ne lascio perdere una *qualsiasi*, ad esempio la prima che è un po' più complicata, e tengo solo l'altra:

$$2x-2 \ge 0,\ \boxed{x \ge 1}.$$

Elevo al quadrato e ottengo

$$x^2-5 = 2x-2; \quad x^2-2x-3=0; \quad (x-3)(x+1)=0; \quad \boxed{x=3} \ \vee \ \cancel{x=-1}$$

non accettabile!
Non è ≥ 1!!!

Verifica tu stesso, per esercizio, sostituendo nell'equazione data, che $x=3$ ne è soluzione, mentre $x=-1$ NON ne è soluzione (rende le due operazioni di radice NON eseguibili restando in campo reale).

EQUAZIONI NELLE QUALI OCCORRE ELEVARE SOLO AD ESPONENTE DISPARI

Non presentano nessuna difficoltà:
il passaggio è sempre effettuabile, senza dover porre NESSUNA CONDIZIONE,
perché muta sempre l'equazione data in un'equazione certamente equivalente a quella di partenza.

Infatti, prendendo ad es. l'esponente 3: se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro cubi;
e viceversa, se due numeri (di segno qualsiasi) sono uguali fra loro,
allora certamente esistono e sono uguali anche le loro radici cubiche.

… E IN CASI PIU' COMPLICATI, COME CI SI COMPORTA?

In generale, si pongono le condizioni di realtà di tutti i radicali presenti,
e **si cerca di trasportare i termini in modo che i due membri siano certamente positivi** (≥ 0)
per ogni valore ammissibile di *x* (non sempre ciò è possibile …).

Soltanto a questo punto si eleva al quadrato:
così facendo, infatti, si è certi di pervenire ad un'equazione la quale
(considerata congiuntamente con le condizioni di realtà) è equivalente a quella di partenza.

Vediamo un esempio.

$$\sqrt{2x-14}-\sqrt{x-8}=1$$

Risolvo:

a) pongo le condizioni di realtà dei radicali $2x-14\ge 0\ (x\ge 7),\ x-8\ge 0\ (x\ge 8)$
le quali danno, in definitiva (devono essere considerate come se fossero "a sistema",
perché vogliamo limitarci a considerare quei valori di *x* che le verificano *entrambe*)

$$\boxed{x\ge 8}$$

b) Ora trasporto i termini in modo da avere due membri ciascuno dei quali sia positivo
(nel senso di: non-negativo, ≥ 0) per ogni valore ammissibile di *x*:

$$(*)\quad \sqrt{2x-14}=1+\sqrt{x-8}$$

Ce l'ho fatta, perché so che una radice quadrata, quando è estraibile restando in campo reale,
dà sempre un risultato non-negativo.

c) Infine elevo al quadrato:

$$(**)\quad \left(\sqrt{2x-14}\right)^2=\left(1+\sqrt{x-8}\right)^2$$

e osservo che, per via di quella positività di ciascun membro della $(*)$
che mi sono assicurato col trasporto dei termini, in effetti $(*)$ e $(**)$ sono equivalenti:

$(*)\Rightarrow(**)$ perché se due numeri sono uguali, allora lo sono anche i loro quadrati;

$(**)\Rightarrow(*)$ perché se i quadrati di due numeri NON NEGATIVI sono uguali,
allora lo sono anche i due numeri stessi
(*osserviamo che questa conclusione non si sarebbe potuta trarre se sui segni dei due numeri non ci fosse stata alcuna informazione*)

Allora

$$2x-14=1+x-8+2\sqrt{x-8}$$
$$-2\sqrt{x-8}=-x+7$$
$$2\sqrt{x-8}=x-7$$

e siamo pervenuti ad una equazione di un tipo già considerato
(la presenza del fattore esterno 2 non influisce, come possiamo facilissimamente controllare,
sui ragionamenti fatti con riferimento al caso $\sqrt{\mathrm{A}(x)}=\mathrm{B}(x)$). Dunque

$$x-7\ge 0;\ \boxed{x\ge 7}$$
$$4(x-8)=(x-7)^2$$
$$4x-32=x^2-14x+49$$
$$-x^2+18x-81=0$$
$$x^2-18x+81=0$$
$$(x-9)^2=0$$
$$\boxed{x=9}\ \textit{accettabile perché soddisfa a tutte le condizioni prima poste.}$$

Una analisi più accurata mostrerebbe che addirittura *in parecchi casi*
le condizioni di realtà che vengono poste prima di elevare al quadrato …
… si rivelano superflue!

Potrai riflettere tu, se vuoi, di fronte agli esercizi che svolgerai, *quando* e *perché* si verifica questo fatto,
ma noi *volutamente non approfondiamo questo argomento*;
sia per brevità, sia per sottolineare che comunque
una condizione superflua può essere benissimo mantenuta: così facendo, non si sbaglia.