ESEMPI SVOLTI

1) $\boxed{\sqrt{x-6}+8-x=0}$

Trasporto i termini che non stanno sotto radice a 2° membro, per ricondurmi a una forma "standard":

$\boxed{\sqrt{x-6}=x-8}$

Ora pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo al quadrato:

$x-8\ge 0;\quad \boxed{x\ge 8}$

$\boxed{x-6=(x-8)^2}$

$x-6=x^2-16x+64;\quad x^2-17x+70=0;\quad (x-7)(x-10)=0;\quad \cancel{x=7} \vee \boxed{x=10}$

Non accettabile, perché non è ≥8.

2) $\boxed{\frac{x}{3}=\sqrt{x-5}+1}$

Moltiplico per 3 per sbarazzarmi del denominatore
(in alternativa, avrei potuto fare il denominatore comune 3 in entrambi i membri per poi spedirlo via):

$x=3\sqrt{x-5}+3$

Isolo il radicale e mi riconduco a una forma "standard":

$-3\sqrt{x-5}=3-x$

$\boxed{3\sqrt{x-5}=x-3}$

Capisco che il fattore 3 che moltiplica il radicale non influisce sui vari ragionamenti, per cui pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo al quadrato:

$x-3\ge 0;\quad \boxed{x\ge 3}$

$\boxed{9(x-5)=(x-3)^2}$

$9x-45=x^2-6x+9;\quad x^2-15x+54=0;\quad (x-6)(x-9)=0;\quad \boxed{x=6 \ \vee\ x=9}$ *entrambe accettabili*

3) $\boxed{\sqrt{x^2-2x}=2}$

Il secondo membro è positivo "per sua natura".
Posso elevare al quadrato senza porre alcuna condizione.

$x^2-2x=4;\quad x^2-2x-4=0;\quad x=1\pm\sqrt{1+4}=\boxed{1\pm\sqrt{5}}$

Le soluzioni trovate sono *certamente accettabili*:
infatti, non c'è alcuna condizione supplementare a cui devono soddisfare.
Tuttavia, potresti controllare sostituendo nell'equazione data
(sarebbe un eserciziettto semplice e carino sui radicali).

4) $\boxed{\sqrt{x+7}=-4}$

Immediatamente, possiamo dire che l'equazione è **IMPOSSIBILE** :
il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo. Anche:
la condizione di positività del secondo membro, richiesta dalla teoria generale,
non può mai essere verificata.

5) $\boxed{\sqrt{x^3-x}=0}$

Il risultato di una radice quadrata è 0 se e solo se è uguale a 0 il radicando.
D'altronde, posso anche ragionare ricalcando la teoria generale,
e dire che la condizione di positività (= non-negatività) del 2° membro è SEMPRE verificata
per cui posso elevare al quadrato senza alcuna condizione supplementare.

Ottengo $x^3-x=0;\quad x(x^2-1)=0;\quad x(x+1)(x-1)=0;\quad \boxed{x=0 \vee x=\pm 1}$

6) $\boxed{\sqrt[3]{x}=4x}$

Dovendosi, per mandar via la radice, elevare ad esponente *dispari*,
non c'è alcuna condizione da porre:

$x=64x^3;\quad 64x^3-x=0;\quad x(64x^2-1)=0;\quad \boxed{x=0 \vee x=\pm 1/8}$ *certamente accettabili*

7) $\boxed{\sqrt[4]{x^2+6}+x=0}$

C'è una radice *quarta*, ed evidentemente mi comporto come se ci fosse una radice *quadrata*. Dunque $\boxed{\sqrt[4]{x^2+6}=-x}$ e ora pongo la condizione di positività del 2° membro, ed elevo alla quarta:

$-x \ge 0;\ \boxed{x \le 0}$

$x^2+6=x^4;\ \ x^4-x^2-6=0;\ \ (x^2-3)\underbrace{(x^2+2)}_{\ne 0\ \forall x}=0;\ \ x^2=3,\ x=\pm\sqrt{3}$

… ma per la condizione posta, solo la soluzione negativa è accettabile; quindi $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

8) $\boxed{\frac{\sqrt{-4x-3}}{3}-\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}=0}$

Mi libero dai denominatori facendo il denominatore comune (in alternativa: moltiplicando per 6 …):

$$\frac{2\sqrt{-4x-3}-3\sqrt{x^2-5}}{\cancel{6}}=0$$

Porto in forma standard $\sqrt{A(x)}=\sqrt{B(x)}$:

$\boxed{2\sqrt{-4x-3}=3\sqrt{x^2-5}}$

Pongo le condizioni di realtà dei radicali:

$-4x-3\ge 0;\ \ 4x+3\le 0;\ \ \boxed{x\le -\frac{3}{4}}$

$x^2-5\ge 0;\ \ \ \boxed{x\le -\sqrt{5}\ \vee\ x\ge\sqrt{5}}$

Le due condizioni poste, *messe a sistema*, mi danno come condizione di accettabilità $\boxed{x\le -\sqrt{5}}$
(in alternativa, potevo anche evitare di risolverne il sistema,
proponendomi di confrontare – alla fine – le soluzioni trovate, con *entrambe* le condizioni poste;
oppure ancora potevo *eliminare una* fra le condizioni *a piacere*, come dice la teoria).

Elevo al quadrato:

$4(-4x-3)=9(x^2-5)$

$-16x-12=9x^2-45$

$9x^2+16x-33=0$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+297}}{9}=\frac{-8\pm\sqrt{361}}{9}=\frac{-8\pm 19}{9}=\left\langle\begin{array}{l}\boxed{-3}\\ \cancel{11/9}\ \textit{non accettabile}\end{array}\right.$$

9) $\boxed{\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{2x-9}}$

Pongo le condizioni di realtà e trasporto i termini in modo da ottenere due membri positivi:

$$\boxed{\begin{cases} x-1\ge 0;\ \ x\ge 1\\ 6-x\ge 0;\ \ -x\ge -6;\ \ x\le 6\\ 2x-9\ge 0;\ \ x\ge 9/2\end{cases}}$$

$\boxed{\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-9}+\sqrt{6-x}}$

Elevo al quadrato:

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-9}+\sqrt{6-x}\right)^2$

$\cancel{x}-1=2\cancel{x}-9+6\cancel{-x}+2\sqrt{(2x-9)(6-x)}$

$-2\sqrt{12x-2x^2-54+9x}=-2;$

$\sqrt{-2x^2+21x-54}=1$

Essendo il 2° membro una costante positiva posso elevare al quadrato senza porre alcuna condizione:

$-2x^2+21x-54=1;\ \ -2x^2+21x-55=0;\ \ 2x^2-21x+55=0$

$$x_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{441-440}}{4}=\frac{21\pm 1}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\boxed{5}\\ \boxed{11/2}\end{array}\right.\ \ \textit{entrambe accettabili}!!!$$

10)
Nei casi in cui non sia possibile tramite spostamenti di termini ottenere due membri certamente ≥ 0, *si potranno anche porre le varie condizioni di realtà – che permetteranno quindi eventualmente, alla fine, di scartare subito qualcuna fra le soluzioni ottenute – … ma ciò non basterà (NOTA): di norma si sarà comunque costretti a sottoporre ciascuna soluzione non scartata al "test di accettabilità a posteriori", sostituendo nell'equazione di partenza.*

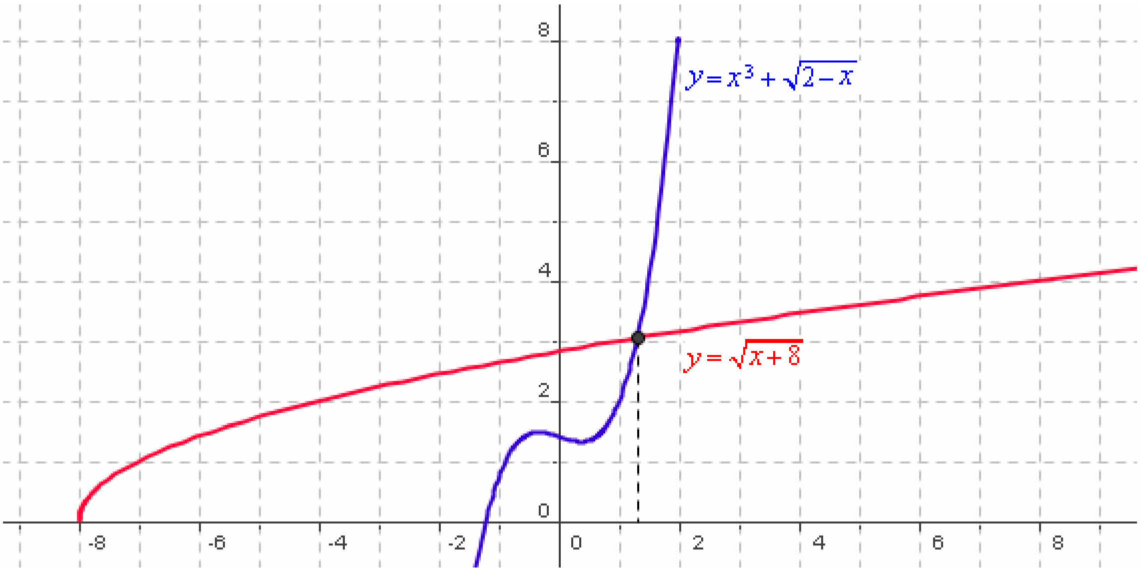
NOTA: a meno che le condizioni di realtà finiscano per assicurare anche la positività dei due membri: ad esempio, di fronte all'equazione $x+\sqrt{x}=\sqrt{5x^2-1}$, *la condizione di realtà del 1° radicale è* $x \geq 0$, *e sotto questa condizione la positività del 1° membro è certa)*

Si potrà anche, specialmente in casi non gestibili algebricamente, ricorrere alla RISOLUZ. GRAFICA, che di norma consentirà solamente di trovare, per le soluzioni, valori approssimati.

Esempio: $\boxed{x^3+\sqrt{2-x}=\sqrt{x+8}}$

Le condizioni di realtà dei radicali sono $x \leq 2,\ x \geq -8$
e in definitiva, per la realtà dei radicali, deve essere $-8 \leq x \leq 2$.
Una soluzione *x* della nostra disequazione potrebbe dunque anche essere negativa; non siamo certi che i due membri siano positivi per ogni valore ammissibile di *x*.
Del resto, elevare al quadrato significherebbe ottenere un'equazione complicata, nella quale sarebbe ancora presente un radicale e che richiederebbe quindi un ulteriore elevamento al quadrato per l'eliminazione di questo.

Abbandoniamo l'idea di risolvere per via algebrica, andiamo al computer e con un software appropriato (ad esempio il bel freeware GEOGEBRA) ci affidiamo ad una risoluzione grafica. Otteniamo



e ci rendiamo conto che i due grafici non possono avere altre intersezioni oltre a quella visibile in figura; l'equazione $x^3+\sqrt{2-x}=\sqrt{x+8}$, infatti, non può avere soluzioni esterne all'intervallo che va da –8 a +2:

- il radicale $\sqrt{2-x}$ esiste soltanto per $2-x \geq 0,\ x \leq 2$,
- mentre il radicale $\sqrt{x+8}$ esiste soltanto per $x+8 \geq 0,\ x \geq -8$.

L'equazione ha dunque una e una sola soluzione, compresa fra 1 e 2, che il software approssima a circa 1,3

Un esercizio di difficoltà superiore potrebbe consistere nel richiedere questa risoluzione grafica SENZA consentire allo studente l'uso del computer. L'impresa non è insormontabile, perché

- il grafico della funzione $y=x^3$ dovrebbe essere familiare all'allievo, mentre quelli delle funz. $y=\sqrt{2-x},\ y=\sqrt{x+8}$ dovrebbero potersi ricavare abbastanza facilmente, "*per manipolazione*" (Vol. 2, pag. 114), a partire dal grafico noto della funzione "madre" $y=\sqrt{x}$.
- Il grafico di $y=x^3+\sqrt{2-x}$ si potrebbe quindi costruire "per somma": presa una ascissa, si sommano le ordinate delle due funzioni che fanno da addendi.

Così facendo, dovrebbe essere possibile riconoscere, pur senza computer, che si ha 1 e 1 sola soluzione e che questa cade nell'intervallo (1, 2). Tale soluz. potrebbe poi essere approssimata in modo più accurato utilizzando metodi della cosiddetta "*analisi numerica*", ad esempio il semplice "*metodo di bisezione*".