B) LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Sono quelle disequazioni nelle quali l'incognita compare, almeno una volta, sotto radice.

Esse vengono risolte eliminando la radice tramite elevamento a potenza;
tuttavia, abbiamo già rilevato (Volume 2, pag. 138) che

1) **data una disuguaglianza,**
   è SEMPRE lecito (qualunque siano i segni dei due membri)
   elevare ambo i membri ad uno stesso esponente DISPARI,
   o estrarne le radici con lo stesso indice DISPARI
   (nel senso che, così facendo, se si parte da una disuguaglianza vera,
   si è certi di pervenire alla fine ad una disuguaglianza ancora vera)

mentre

2) **l'elevamento ad esponente PARI dei due membri di una disuguaglianza,**
   o l'estrazione di radice con indice PARI dei due membri di una disuguaglianza,
   sono leciti
   SOLTANTO QUANDO I DUE MEMBRI DELLA DISUGUAGLIANZA DATA
   SONO NUMERI POSITIVI O NULLI.

Da ciò si traggono, per le disequazioni, i due **principi di equivalenza** seguenti:

1) **in una disequazione,**
   è SEMPRE lecito elevare ad uno stesso esponente DISPARI ambo i membri,
   o estrarre la radice, con uno stesso indice DISPARI, di entrambi i membri:
   così facendo, infatti, la disequazione considerata
   si muterà SEMPRE in un'altra ad essa EQUIVALENTE, cioè avente le stesse soluzioni

2) **e invece in una disequazione**
   è lecito elevare ad uno stesso esponente PARI entrambi i membri,
   o estrarre la radice, con uno stesso indice PARI, di entrambi i membri
   (nel senso che così facendo si sarà certi di ottenere una disequazione EQUIVALENTE a quella data),
   SOLTANTO QUANDO ognuno dei due membri è un'espressione che assume valore
   POSITIVO O NULLO ($\geq \mathbf{0}$) **SEMPRE, ossia:**
   - **per qualsiasi valore di** x,
   - o perlomeno per qualsiasi valore di x appartenente al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ al quale vogliamo confinare il nostro interesse e nell'ambito del quale cerchiamo le soluzioni.

Ora affronteremo dunque lo studio delle disequazioni irrazionali,
iniziando dalle tipologie più semplici e rilevanti.

Per quanto detto, ***i casi "delicati" sono soltanto quelli nei quali***
per liberarsi dalla radice occorre elevare almeno una volta ad esponente PARI.

Prima di cominciare, sarà opportuno ricordare alcune
QUESTIONI DI SEGNO E CONVENZIONI riguardanti i radicali.

Parlando di radicali:

Se l'indice è *DISPARI*,
- il *radicando* potrà essere di *segno qualsiasi*: positivo, negativo o nullo
- e il *risultato* dell'estrazione di radice conserverà sempre lo *stesso segno del radicando*

Se l'indice è *PARI*,
- il *radicando* dovrà essere *positivo o nullo*, altrimenti l'operazione sarebbe impossibile (NOTA)
- il *risultato* dell'estrazione di radice è, *per convenzione, anch'esso positivo o nullo*
  (insomma, NON è $\cancel{\sqrt{9} = \pm 3}$, bensì $\sqrt{9} = 3$)

NOTA
… a meno di sconfinare in campo complesso, cosa che, salvo esplicito avviso contrario, è sottinteso non si faccia.
E d'altronde, nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi la comunità matematica *NON* definisce le relazioni di < e >.

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI “DEL 1° TIPO”: $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \mathrm{B}(x)}$

Ragioniamo su di un esempio, poi generalizzeremo.

(1) $\sqrt{x-2} < x-4$

Se un numero x è soluzione di (1), allora x:

- renderà possibile l’estrazione di radice “restando in campo reale”, cioè sarà tale che $\boxed{x-2 \geq 0}$;
- renderà strettamente positivo il secondo membro, cioè sarà tale che $\boxed{x-4 > 0}$
  (e questo perché il secondo membro, se risulta strettamente maggiore del risultato dell’estrazione di una radice quadrata, che è un numero positivo o nullo, è di certo strettamente positivo);
- verificherà la disequazione che si ottiene elevando al quadrato, vale a dire la disequazione
  $\boxed{x-2 < (x-4)^2}$
  (infatti, se vale una disuguaglianza fra due numeri non negativi – e tali sono i due membri della (1) – allora varrà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato).

Quindi, se x è soluzione di (1), allora x sarà soluzione anche del sistema

$$(2)\quad \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ x-2 < (x-4)^2 \end{cases}$$

E viceversa, si può dimostrare (NOTA) che se x è soluzione di (2), allora è anche soluzione di (1).

In definitiva, **la disequazione (1) e il sistema (2) hanno le stesse soluzioni, cioè sono equivalenti**.
La risoluzione della disequazione (1) si effettuerà quindi passando al sistema equivalente (2), che rispetto alla disequazione iniziale ha il vantaggio di non contenere la x sotto radice.

NOTA
Supponiamo, infatti, che x sia soluzione del sistema (2).
Allora, essendo verificata la disuguaglianza

$$x-2 < (x-4)^2$$

ed essendo questa (per la prima condizione del sistema) una disuguaglianza fra numeri positivi, per la quale dunque è lecito estrarre le radici quadrate, si avrà anche

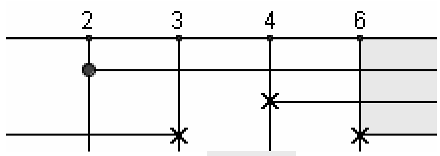
$$\sqrt{x-2} < \sqrt{(x-4)^2}$$

$\sqrt{x-2} < |x-4|$ *da cui*

(1) $\sqrt{x-2} < x-4$ *in quanto, per la seconda condizione del sistema, si ha* $|x-4| = x-4$

Insomma: $\boxed{(1)\ \sqrt{x-2} < x-4} \Leftrightarrow \boxed{(2)\ \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ x-2 < (x-4)^2 \end{cases}}$ e risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 4 \\ x-2 < x^2-8x+16;\ \ldots\ x^2-9x+18 > 0;\ \ldots\ x < 3 \vee x > 6 \end{cases}$$



$\boxed{x > 6}$

La disequazione irrazionale data è verificata per tutti i numeri reali $x > 6$:
l’insieme delle sue soluzioni è l’intervallo $(6, +\infty)$.

IN GENERALE:

La disequazione $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \mathrm{B}(x)}$ è equivalente al sistema $\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 & \text{condiz. "di realtà del radicale"} \\ \mathrm{B}(x) > 0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"} \\ \mathrm{A}(x) < [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI "DEL 2° TIPO": $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} > \mathrm{B}(x)}$

Esempio:

(1) $\sqrt{x^2-3} > x-1$

Se un numero x è soluzione di (1), allora cosa possiamo dire su *x*?

Innanzitutto possiamo dire che *x rende la radice estraibile in campo reale*, ossia è tale che $x^2-3 \ge 0$.

Poi, possiamo dire che:

- *o x* è tale che $x-1<0$
- *oppure* è tale che $x-1 \ge 0$;
  ma *in quest'ultimo caso x*, poiché verifica una disuguaglianza fra due numeri non negativi, verificherà anche la disuguaglianza ottenibile elevando al quadrato e cioè la $x^2-3>(x-1)^2$.

Ricapitoliamo: (1) $\sqrt{x^2-3} > x-1 \;\Rightarrow\; \overset{(2)}{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1<0 \end{cases}} \vee \overset{(2')}{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ x^2-3 > (x-1)^2 \end{cases}}$

Viceversa, si può vedere che, se un valore di *x* è soluzione di uno dei due sistemi (2) o $(2')$, allora quello stesso valore di *x* verificherà anche la (1):

$(2) \Rightarrow (1)$ perché se *x* è soluzione di (2), allora *x* è tale che esista, in campo reale, il risultato di $\sqrt{x^2-3}$; ma tale risultato, essendo un numero ≥ 0, sarà *certamente* maggiore di $x-1$ che è <0; dunque per quell'*x* varrà la disuguaglianza $\sqrt{x^2-3} > x-1$ ossia la (1)

$(2') \Rightarrow (1)$ perché se *x* è soluzione di $(2')$, allora in particolare si ha $x^2-3>(x-1)^2$, e i due membri di questa disuguaglianza sono due numeri ≥ 0
(il 2° m. perché è un quadrato, il 1° per la prima condiz. del sistema, o anche perché > di un quadrato);
ma allora la disuguaglianza si può sottoporre a estrazione di radice quadrata, quindi è vera anche la $\sqrt{x^2-3} > \sqrt{(x-1)^2}$ ossia $\sqrt{x^2-3} > |x-1|$
che però, essendo $x-1 \ge 0$, diventa $\sqrt{x^2-3} > x-1$: ossia, la (1).

In definitiva, dato questo "viceversa",
l'implicazione che avevamo scritto da sinistra verso destra diventa una *doppia* implicazione
e abbiamo

$$(1)\ \boxed{\sqrt{x^2-3} > x-1} \;\Leftrightarrow\; \overset{(2)}{\boxed{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1<0 \end{cases}}} \vee \overset{(2')}{\boxed{\begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ x^2-3 > (x-1)^2 \end{cases}}}$$

Insomma, la nostra disequazione EQUIVALE ad una coppia di sistemi separati da un "vel" logico e saranno sue soluzioni quei valori di *x* che soddisfano il sistema (2) o, in alternativa, il $(2')$:
noi risolveremo il (2), risolveremo il $(2')$, e metteremo nel nostro "paniere" di soluzioni
tanto le soluzioni dell'uno *quanto* quelle dell'altro: faremo, insomma, per trovare le soluzioni di (1),
l' UNIONE INSIEMISTICA fra l'insieme delle soluzioni di (2) e l'insieme delle soluzioni di $(2')$.

IN GENERALE
La disequazione

$\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} > \mathrm{B}(x)}$

è equivalente alla coppia di sistemi, separati da un VEL logico:

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) < 0 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) > [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$$

ossia ne sono soluzioni quei valori di *x* che rendono, in alternativa:

- *reale* il radicale e *negativo* il secondo membro;
- oppure *reale* il radicale, *positivo o nullo* il secondo membro e *verificata* la *condizione ottenibile elevando al quadrato*.

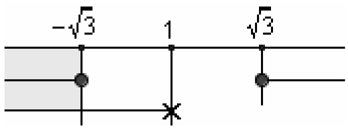
La successiva OSSERVAZIONE 1 chiarirà come
nel 2° sistema si potrebbe anche eliminare la prima fra le tre condizioni.

Terminiamo dunque la risoluzione dell'esempio proposto.

$$\sqrt{x^2-3} > x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-3 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ x^2-3 > (x-1)^2 \end{cases}$$

Primo sistema:

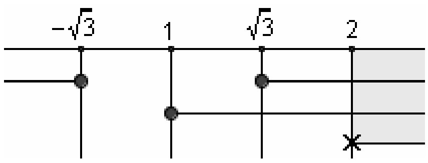
$$\begin{cases} x^2-3 \ge 0;\ x^2 \ge 3;\ |x| \ge \sqrt{3};\ x \le -\sqrt{3} \vee x \ge \sqrt{3} \\ x-1<0;\ x<1 \end{cases}$$



$x \le -\sqrt{3}$

Secondo sistema:

$$\begin{cases} x^2-3 \ge 0;\quad x \le -\sqrt{3} \vee x \ge \sqrt{3} \\ x-1 \ge 0;\ x \ge 1 \\ x^2-3 > (x-1)^2;\ \ldots\ x>2 \end{cases}$$



$x > 2$

per cui, in definitiva, la disequazione irrazionale data è verificata per tutti gli x tali che $\boxed{x \le -\sqrt{3} \vee x > 2}$: l'insieme delle sue soluzioni è l'insieme $\left(-\infty, -\sqrt{3}\,\right] \cup (2, +\infty)$.

OSSERVAZIONE 1

A ben guardare, nell'ambito del sistema $\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) > [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$

la prima condizione (quella "di realtà del radicale") è SUPERFLUA,
perché IMPLICITA nella terza condizione
(se $\mathrm{A}(x) > [\mathrm{B}(x)]^2$, allora A($x$), essendo > di un quadrato che è ≥ 0, sarà CERTAMENTE >0)

e potrebbe dunque essere eliminata: $\boxed{\begin{cases} \cancel{\mathrm{A}(x) \ge 0} \\ \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) > [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}}$. Se, d'altra parte, ce la teniamo, NON sbaglieremo.

OSSERVAZIONE 2

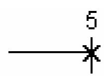
L'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{\mathrm{A}(x)} > \mathrm{B}(x)$ è l' UNIONE INSIEMISTICA

fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} \mathrm{A}(x) \ge 0 \\ \mathrm{B}(x) < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \cancel{\mathrm{A}(x) \ge 0} \\ \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) > [\mathrm{B}(x)]^2 \end{cases}$.

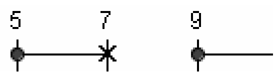
Volendo, si potrebbe "costruire graficamente" tale unione insiemistica tramite uno *SCHEMA DI UNIONE* nel quale rappresenteremmo, ***SU DI UNA STESSA*** *NUMBER LINE*, le soluzioni di ENTRAMBI i sistemi PER POI ANDARE A PRENDERE ***TUTTE*** LE SOLUZIONI IN QUESTO MODO EVIDENZIATE.

Ad esempio,

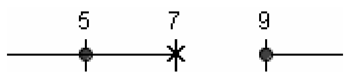
se il primo fra i due sistemi avesse le soluzioni $\boxed{x<5}$



e il secondo sistema avesse come soluzioni $\boxed{5 \le x < 7\ \vee\ x \ge 9}$,



lo SCHEMA DI UNIONE sarebbe quello
riportato qui a destra



e la disequazione avrebbe dunque come soluzioni $\boxed{x<7\ \vee\ x \ge 9}$.