ESEMPI SVOLTI SULLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI DEL 1° E DEL 2° TIPO

1)

$\boxed{\sqrt{x^2+1}<1-3x}$

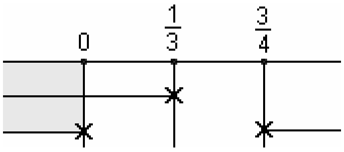
La disequazione assegnata
è del “1° tipo”;
passo allora al sistema equivalente

$$\boxed{\begin{array}{c}1°\ \text{TIPO}\\ \sqrt{A(x)}<B(x)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0 & \text{condizione "di realtà del radicale"}\\ B(x)>0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"}\\ A(x)<[B(x)]^2\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x^2+1\ge 0\\ 1-3x>0\\ x^2+1<(1-3x)^2\end{cases}$$

NOTA
*Una condizione sempre verificata è,*
*nell’ambito di un sistema, superflua, ininfluente,*
*e pertanto può essere ignorata, può essere eliminata.*

$$\begin{cases}\text{SEMPRE VERIFICATA, } \forall x \quad \text{(NOTA)}\\ -3x>-1;\ \ 3x<1;\ \ x<1/3\\ x^2\cancel{+1}<\cancel{1}-6x+9x^2;\ \ -8x^2+6x<0;\ \ \overset{4}{\cancel{8}}x^2-\overset{3}{\cancel{6}}x>0;\ \ x(4x-3)>0;\ \ x<0 \vee x>3/4\end{cases}$$




$\boxed{x<0}$: le soluzioni del sistema, quindi della disequaz., sono i numeri negativi.

2)

$\boxed{\sqrt{x+2}>2x+1}$

La disequazione assegnata
è del “2° tipo”;
passo allora ai due
sistemi equivalenti

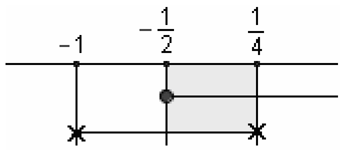
$$\boxed{\begin{array}{c}2°\ \text{TIPO}\\ \sqrt{A(x)}>B(x)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0\\ B(x)<0\end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases}\cancel{A(x)\ge 0} & \text{superflua, perché implicita nella } 3^a\\ B(x)\ge 0\\ A(x)>[B(x)]^2\end{cases}}$$

$$\begin{cases}x+2\ge 0\\ 2x+1<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{x+2\ge 0} \ \text{superflua, implicita nella } 3^a\\ 2x+1\ge 0\\ x+2>(2x+1)^2\end{cases}$$

I due sistemi sono separati da un “vel” logico:
un valore di $x$ sarà soluzione della mia disequaz. qualora sia soluzione *o* dell’uno, *oppure* dell’altro sistema (alla fine, farò l’*unione insiemistica* fra gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi).

$$\begin{cases}x+2\ge 0;\ \ x\ge -2\\ 2x+1<0;\ \ x<-1/2\end{cases} \qquad -2\le x<-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}2x+1\ge 0;\ \ x\ge -1/2\\ x+2>(2x+1)^2;\ \ -4x^2-3x+1>0;\ \ 4x^2+3x-1<0;\ \ -1<x<1/4\end{cases}$$

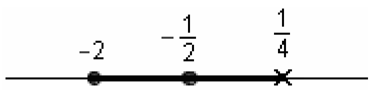



$\boxed{-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{4}}$

Soluzioni della disequazione:

$-2\le x<-\frac{1}{2} \ \vee\ -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{4}$,

ossia, utilizzando eventualmente uno “schema di unione” →
(ma la situazione è qui particolarmente semplice,
potremmo benissimo fare a meno dello “schema di unione”):




$\boxed{-2\le x<\frac{1}{4}}$

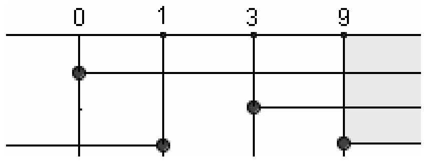
3)

$\boxed{2\sqrt{x} \le x-3}$ $\quad \left(\sqrt{4x} \le x-3\right)$

La disequazione assegnata è una variante del “1° tipo”; se ripercorri i ragionamenti fatti a pag. 11, adattandoli alla presenza di un $\le$ anziché di un $<$, capirai che il sistema equivalente è

$$\begin{cases} 4x \ge 0 \\ x-3 \boxed{\ge} 0 \\ 4x \boxed{\le} (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 3 \\ 4x \le x^2-6x+9;\ \ x^2-10x+9 \ge 0;\ \ (x-1)(x-9) \ge 0;\ \ x \le 1 \ \vee\ x \ge 9 \end{cases}$$




Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione proposta, sono i valori $\boxed{x \ge 9}$.

4)

$\boxed{\sqrt{x^2-5x+4} \ge x}$

La disequazione assegnata è una variante del “2° tipo”; se ripercorri i ragionamenti fatti a pag. 12, adattandoli alla presenza di un $\ge$ anziché di un $>$, capirai che la coppia di sistemi equivalenti è

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \ge 0 \\ x<0 \ \text{(NOTA)} \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2-5x+4 \ge 0} \ \text{superflua, implicita nella } 3^a \\ x \ge 0 \\ x^2-5x+4 \boxed{\ge} x^2 \end{cases}$$

NOTA
*Nulla cambia qui,*
*perché la distinzione di casi*
*(x<0, oppure,*
*nell’altro sistema, $x \ge 0$ )*
*è sempre la stessa!*

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \ge 0; \quad x \le 1 \ \vee\ x \ge 4 \\ x<0 \end{cases} \quad \text{Soluz. 1° sistema}: \ x<0$$

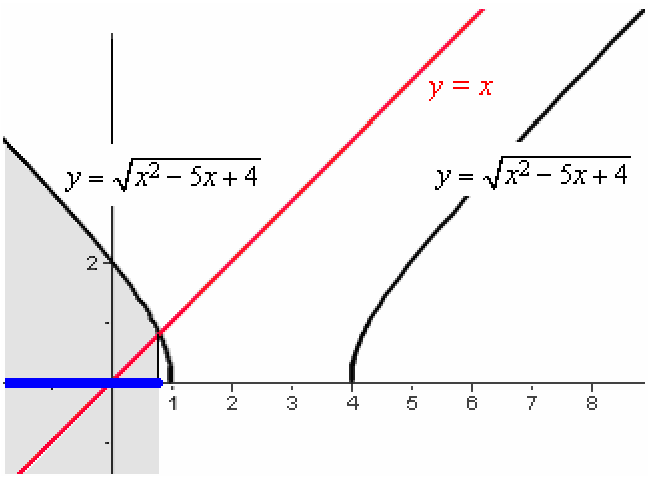
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \cancel{x^2}-5x+4 \ge \cancel{x^2};\ \ 5x-4 \le 0;\ \ x \le 4/5 \end{cases} \quad \text{Soluz. 2° sistema}: \ 0 \le x \le 4/5$$

Con o senza lo “schema di unione” (che comunque riportiamo qui a destra)


si trae che le soluzioni della disequazione sono i valori $\boxed{x \le \frac{4}{5}}$

*Vogliamo **controllare per via grafica** la validità della conclusione ottenuta?*

*Ci basterà utilizzare un qualunque software, ad esempio il freeware GEOGEBRA, che sia in grado di diagrammare una funzione, per tracciare i grafici del primo membro e del secondo membro in uno stesso riferimento cartesiano, **e poi andare a vedere per quali valori di x la y corrispondente sul grafico del primo membro è maggiore, o uguale, della y corrispondente sul grafico del 2° membro.***




*La curva $y=\sqrt{x^2-5x+4}$ è costituita da due rami.*
*Effettivamente, la conclusione*
$\boxed{x \le \frac{4}{5}}$
*appare plausibile.*