DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: CASI PARTICOLARI DEL 1° TIPO E DEL 2° TIPO

5)

$\sqrt{x-7}<2$

E' del 1° tipo. La teoria generale ci dice che la disequazione equivale ad un sistema con 3 condizioni:

$$\boxed{\begin{array}{c}1°\text{ TIPO}\\ \sqrt{A(x)}<B(x)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0 & \text{condizione "di realtà del radicale"}\\ B(x)>0 & \text{condiz. "di positività del 2° membro"}\\ A(x)<[B(x)]^2\end{cases}} \quad \text{cioè, in questo caso,} \quad \begin{cases}x-7\ge 0\\ \cancel{2>0}\\ x-7<4\end{cases}$$

Osserviamo però che la seconda condizione è una disuguaglianza numerica non contenente l'incognita, vera di per sé, quindi superflua (*per questo* l'abbiamo cancellata).

Allora il sistema si riduce alle sole due condizioni $\begin{cases}\boxed{x-7\ge 0}\ \ \text{(di realtà)};\ \ x\ge 7\\ \boxed{x-7<4};\ \ x<11\end{cases}$

La nostra disequazione ha dunque come soluzioni i valori $\boxed{7\le x<11}$.

Si sarebbe potuto anche arrivare a questa conclusione più rapidamente:
data la disequazione $\sqrt{x-7}<2$, noi possiamo scrivere la condizione di realtà $x-7\ge 0$, alla quale comunque x dovrà *necessariamente* soddisfare per essere soluzione, poi (essendo i due membri certamente esistenti e positivi per ogni valore di x che soddisfa tale condizione di realtà) elevare al quadrato ottenendo $x-7<4$.

Se dunque x è soluzione della disequazione data, allora x sarà soluzione del sistema $\begin{cases}x-7\ge 0\\ x-7<4\end{cases}$;

e si può controllare che vale pure il *viceversa*, cioè che ogni soluzione del sistema lo è anche della diseq.
(se x è soluz. del sistema, in particolare verifica la 2^a condizione e ne rende entrambi i membri positivi;
ma se i due membri di una disuguaglianza vera sono positivi,
allora è vera pure la disuguaglianza ottenibile estraendo la radice quadrata)

6)

$\sqrt{x^2-9}>4$

Qui siamo nel 2° tipo.
La teoria generale ci dice che la disequazione equivale a una coppia di sistemi, separati da un "vel" logico:

$$\boxed{\begin{array}{c}2°\text{ TIPO}\\ \sqrt{A(x)}>B(x)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}A(x)\ge 0\\ B(x)<0\end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases}\cancel{A(x)\ge 0} & \text{superflua, perché implicita nella } 3^a\\ B(x)\ge 0\\ A(x)>[B(x)]^2\end{cases}} \quad \text{ossia} \quad \cancel{\begin{cases}\cancel{x^2-9\ge 0}\\ \cancel{4<0}\end{cases}} \vee \begin{cases}\cancel{4\ge 0}\\ x^2-9>16\end{cases}$$

Spieghiamo ora le **cancellazioni**.
il 1° sistema, contenendo una condizione impossibile, è impossibile cioè
non è verificato da nessun valore di x (non ci porta soluzioni, *per questo* l'abbiamo cancellato);
nel 2° sistema, la condizione $4\ge 0$ non contiene x ed è banalmente vera, quindi è superflua, cancellabile.
Sopravvive la sola condizione $x^2-9>16$,
risolvendo la quale si trovano dunque le soluzioni della disequazione:

$\boxed{x^2-9>16}$; $x^2>25$; $|x|>5$; $\boxed{x<-5\vee x>5}$.

Si sarebbe potuto anche arrivare a questa conclusione **più rapidamente**:
data la disequazione $\sqrt{x^2-9}>4$ noi possiamo scrivere la condizione di realtà $x^2-9\ge 0$,
ponendo così alla x un vincolo al quale x dovrà *per forza* soddisfare se vuole essere soluzione,
poi (dato che i due membri sono ≥ 0 per ogni valore di x) elevare al quadrato ottenendo $x^2-9>16$;
sennonché, la condizione così ottenuta rende inutile a questo punto quell'altra,
perché se un numero è maggiore di 16, allora è *certamente* anche maggiore di 0.
In definitiva, dalla disequazione discende come conseguenza la condizione $x^2-9>16$;
e viceversa ,
se x verifica quest'ultima condizione, allora x rende vera una disuguaglianza fra numeri positivi
quindi renderà vera anche la disuguaglianza ottenibile estraendone la radice quadrata,
ossia la disuguaglianza $\sqrt{x^2-9}>4$.

7)

$\sqrt{3x-2} < -8$

Si vede istantaneamente che questa disequazione è **IMPOSSIBILE**.
Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, quando esiste in campo reale, è *sempre* ≥ 0,
non può quindi *mai* essere minore di un numero negativo.

8)

$\sqrt{3x-2} > -8$

Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, *quando esiste* in campo reale, è *sempre* ≥ 0,
quindi *certamente* maggiore di un numero negativo.
Le soluzioni di questa disequazione sono dunque tutti e soli i valori di x
che rendono possibile l'estrazione di radice restando in campo reale.
La disequazione data **EQUIVALE** perciò **ALLA SOLA CONDIZIONE DI REALTA'**

$\boxed{3x-2 \geq 0}$; $x \geq 2/3$.

Controlla pure, caro lettore, come, se avessimo applicato pedissequamente la "normale" teoria
sulle disequazioni irrazionali del 1° e del 2° tipo alle disequazioni 7) e 8), saremmo giunti
alle medesime conclusioni alle quali ci ha consentito di pervenire un ragionamento più rapido.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: UN ALTRO CASO

E se avessimo $\boxed{\sqrt{\mathrm{A}(x)} \lessgtr \sqrt{\mathrm{B}(x)}}$, come dovremmo comportarci?

Osserviamo innanzitutto che possiamo pensare soltanto al <, oppure soltanto al >, a nostra scelta,
in quanto i due casi sono perfettamente speculari (studiato uno, è studiato anche l'altro, perché
riconducibile al precedente semplicemente riscrivendo la disuguaglianza al rovescio, da destra a sinistra).

Pensiamo allora, ad esempio, alla

(*) $\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \sqrt{\mathrm{B}(x)}$.

Innanzitutto, se un valore di x soddisfa alla (*), allora renderà estraibili in campo reale
entrambi i radicali, cioè soddisferà simultaneamente ad entrambe le condizioni $\mathrm{A}(x) \geq 0,\ \mathrm{B}(x) \geq 0$
e inoltre, rendendo vera una disuguaglianza fra numeri positivi, verificherà anche la disuguaglianza
ottenibile elevando al quadrato: $\mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x)$.

Pertanto, se x è soluzione della (*), allora x sarà soluzione anche del sistema

(**) $\begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ \mathrm{B}(x) \geq 0 \\ \mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x) \end{cases}$

E' poi facile controllare che se x è soluzione di (**), allora x è anche soluzione di (*)
(di una disuguaglianza fra numeri positivi è lecito estrarre la radice quadrata).

Pertanto (*) ha come SISTEMA EQUIVALENTE (**).
Osserviamo, fra l'altro, che in (**) la 2^a condizione è superflua, perché è conseguenza delle altre due.

In definitiva avremo:

$$\sqrt{\mathrm{A}(x)} < \sqrt{\mathrm{B}(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}(x) \geq 0 \\ \cancel{\mathrm{B}(x) \geq 0} \text{ superflua, implicita nelle altre due} \\ \mathrm{A}(x) < \mathrm{B}(x) \end{cases}$$

9) Un esempio:

$\sqrt{2x-3} > \sqrt{x-4}$

Abbiamo volutamente preso un esempio col > anziché col < !
Se vuoi, puoi riscrivere al rovescio $\sqrt{x-4} < \sqrt{2x-3}$,
ma questo non è indispensabile per il ragionamento.

Dunque:

$$\begin{cases} \cancel{2x-3 \geq 0} \text{ superflua, implicita nelle altre due} \\ x-4 \geq 0;\quad x \geq 4 \\ 2x-3 > x-4;\quad x > -1 \end{cases} \qquad \text{da cui } \boxed{x \geq 4}.$$

NOTA
Se ti dimentichi
di cancellare
una condizione superflua,
la cosa non deve preoccuparti:
l'esercizio esce giusto lo stesso!