DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: ULTERIORI TIPI DI ESERCIZI

Se poi avessimo esercizi più complicati, potremmo comportarci come nell'esempio seguente.

10) $\boxed{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}>2}$

Può una disuguaglianza o una disequazione essere elevata al quadrato?
O essere sottoposta ad estrazione di radice quadrata?
Ribadiamolo:
entrambi i passaggi si possono effettuare *a condizione che* i due membri siano costanti *positive* (≥ 0),
oppure siano espressioni contenenti l'incognita, ma *positive* (≥ 0) per *ogni* valore dell'incognita,
o meglio per *tutti i valori dell'incognita che vengono presi in considerazione in quel particolare contesto.*

Allora: **trasportiamo** il secondo radicale a secondo membro,
$\sqrt{2x+1}>2+\sqrt{x-3}$
e tenendo conto che quando una radice quadrata esiste in campo reale, il suo valore è sempre positivo (≥ 0), ci troviamo di fronte proprio a una **disequazione a membri positivi**, che potrà essere elevata al quadrato. Dobbiamo però prima di tutto scrivere le "**condizioni di realtà dei radicali**" $2x+1\ge 0,\ x-3\ge 0$, ossia considerare esclusivamente quei valori di x che rendono estraibili entrambe le radici senza uscire da $\mathbb{R}$.

Controlla con attenzione lo schema qui sotto riportato:

$$\sqrt{2x+1}>2+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x-3\ge 0 \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2>\left(2+\sqrt{x-3}\right)^2 \end{cases}$$

e vedrai che, in virtù di quanto detto nel riquadro sovrastante, grazie alla positività dei due membri della disequazione che viene elevata al quadrato, valgono effettivamente ENTRAMBE le implicazioni,
- **sia quella da sinistra a destra** (quindi: ogni soluz. della disequazione lo è anche del sistema),
- **sia quella da destra a sinistra** (quindi: ogni soluz. del sistema lo è anche della disequazione).

NOTA IMPORTANTISSIMA:
Quando si passa da una condizione
(equazione, disequazione, sistema …)
ad un'altra,
la nuova condizione è EQUIVALENTE
a quella di partenza quando valgono
ENTRAMBE le implicazioni:
$(1)\Rightarrow(2)$,
cioè ogni soluz. di (1) è anche soluz. di (2);
$(2)\Rightarrow(1)$,
cioè ogni soluz. di (2) è anche soluz. di (1)

Ora dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ x-3\ge 0 \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2>\left(2+\sqrt{x-3}\right)^2;\quad 2x+1>4+x-3+4\sqrt{x-3};\quad -4\sqrt{x-3}>-x;\quad 4\sqrt{x-3}<x \end{cases}$$

Risolviamo perciò la diseq. $4\sqrt{x-3}<x$, poi porremo le sue soluzioni a sistema con le altre due condizioni.

$$4\sqrt{x-3}<x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3\ge 0 \\ x>0 \\ 16(x-3)<x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 3 \\ x>0 \\ x^2-16x+48>0;\quad x<4 \ \vee\ x>12 \end{cases} \qquad 3\le x<4 \ \vee\ x>12$$

Pertanto $\begin{cases} 2x+1\ge 0;\ x\ge -1/2 \\ x-3\ge 0;\ x\ge 3 \\ 3\le x<4 \ \vee\ x>12 \end{cases}$ e in definitiva, risolvendo il sistema, $\boxed{3\le x<4 \ \vee\ x>12}$.

Di fronte a disequazioni irrazionali di forma non-standard, quindi,
- *si pongono le condizioni di realtà di ogni radice quadrata presente,*
- *si cerca, se possibile, di trasportare i termini in modo da ottenere due membri certamente positivi,*
- *e se questo passaggio preliminare ha successo si eleva al quadrato e si prosegue.*

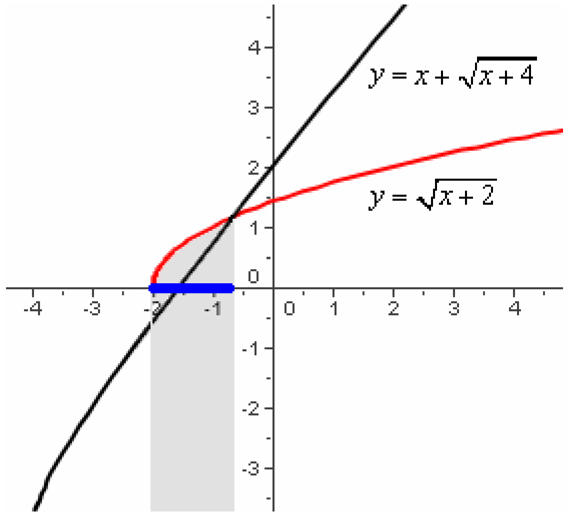
In generale, di fronte ad ogni passaggio per la risoluzione di un'equazione, disequazione o sistema, occorre sempre chiedersi:
"Arrivati qui, SI POTREBBE TORNARE INDIETRO? La condizione ottenuta, o il sistema di condizioni ottenute, implica, a sua volta, la condizione o il sistema di partenza?"
SE LA RISPOSTA È AFFERMATIVA, IL PROCEDIMENTO È LECITO.

Una analisi attenta porterebbe a volte a riconoscere che alcune fra le condizioni poste sono superflue;
tuttavia, **una condizione superflua può essere benissimo mantenuta, perché in questo modo non si sbaglia**.

Nel caso non sia possibile effettuare trasporti in modo da ottenere due membri certamente positivi per ogni x, restano aperti metodi risolutivi che si appoggiano ad una rappresentazione grafica.

Prendiamo la disequazione

11) $\boxed{x+\sqrt{x+4}<\sqrt{x+2}}$



La presenza di coefficienti tutti positivi non inganni!
Le condizioni di realtà $x \ge -4,\ x \ge -2$
ci dicono che dev'essere $x \ge -2$
ma ciò non ci assicura che x sia positivo;
e per i valori di x compresi fra –2 e 0,
il 1° membro potrebbe assumere valore negativo.
Non è perciò vero che i due membri siano positivi
"per tutti i valori di x che interessano":
non possiamo elevare al quadrato!
Facciamo un grafico al computer,
ad esempio col freeware GEOGEBRA.

Dal grafico possiamo desumere che la disuguaglianza
è verificata per tutti gli x che vanno dall'ascissa –2
(ascissa a partire dalla quale comincia ad esistere la funzione $y=\sqrt{x+2}$)
fino all'ascissa in corrispondenza della quale le due curve hanno il loro unico punto di intersezione.

Il software ci permette di determinare l'ascissa approssimativa del punto di intersezione fra i due grafici, che risulta essere circa $-0,67$.

La nostra diseq. ha come soluzioni i valori $\boxed{\mathbf{-2 \le x < -0,67}}$, dove quest'ultimo è un valore approssimato.

Certo, risoluzioni grafiche di questo tipo presuppongono riflessioni *ulteriori* riguardanti l'andamento dei grafici, finalizzate a domandarsi se intersezioni o "scavalcamenti" di un grafico rispetto all'altro possano aver luogo in un campo di ascisse *che il software non ha visualizzato*. Insomma, va valutato, con ragionamenti vari, il comportamento *generale* dei due grafici, anche al di fuori della zona che il software ha reso visibile.

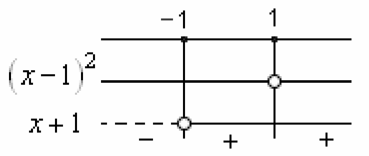
12) $\boxed{\sqrt[3]{x^2+x-1}<x}$

Qui per sbarazzarci della radice dobbiamo ELEVARE AL CUBO, quindi ad esponente dispari, PASSAGGIO SEMPRE LECITO, nel senso che porta sempre, senza dover porre nessuna condizione, ad una disequazione *equivalente* a quella di partenza.
Dunque:

$x^2+x-1<x^3$

$-x^3+x^2+x-1<0;\ \ x^3-x^2-x+1>0;\ \ \ldots\ ;\ \ (x-1)^2(x+1)>0;$

$\boxed{x>-1 \text{ ma } x \ne 1}$



13) $\boxed{\sqrt[4]{x^2+2}>x}$

Si capisce che in questo caso occorrerà elevare alla quarta (esp. pari), *nei casi in cui ciò sia possibile*, e si opererà esattamente come per le disequazioni irrazionali "del 2° tipo" $\sqrt{A(x)}>B(x)$. Dunque:

$$\sqrt[4]{x^2+2}>x \iff \begin{cases} x^2+2 \ge 0 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2+2 \ge 0} \\ x \ge 0 \\ x^2+2>x^4 \end{cases}$$

$$1° \text{ sistema}: \begin{cases} x^2+2 \ge 0 \ \text{ sempre verificata} \\ \boxed{x<0} \end{cases}$$

$$2° \text{ sistema}: \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+2>x^4;\ \ x^4-x^2-2<0;\ \ (x^2-2)\underbrace{\cancel{(x^2+1)}}_{>0 \textit{ sempre}}<0;\ \ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \qquad \boxed{0 \le x<\sqrt{2}} \end{cases}$$

Soluzioni disequazione: $x<0 \vee 0 \le x<\sqrt{2}$ ossia $\boxed{x<\sqrt{2}}$

14) $\boxed{\dfrac{\sqrt{x+12}-x}{\sqrt{x}-x+6}<0}$

N > 0

$$\sqrt{x+12}-x>0$$
$$\sqrt{x+12}>x$$
$$\begin{cases} x+12\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x+12\ge 0}\ \ \textit{sovrabbondante} \\ x\ge 0 \\ x+12>x^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge -12 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-12<0 \quad (x+3)(x-4)<0 \quad -3<x<4 \end{cases}$$
$$\underbrace{-12\le x<0 \ \vee\ 0\le x<4}_{-12\le x<4}$$

La condizione di esistenza è: $x+12\ge 0,\ x\ge -12$
Dunque il Numeratore:

- esiste solo quando $x\ge -12$ (NON esiste per $x<-12$) ed è
- positivo per $-12\le x<4$
- nullo per $x=4$ (invece, come si può controllare, per $x=-12$ è > 0)
- negativo per $x>4$

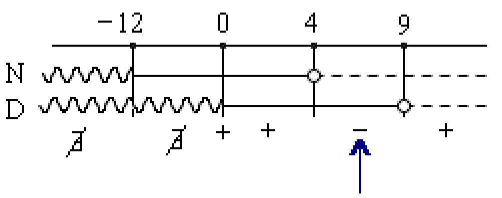
D > 0

$$\sqrt{x}-x+6>0$$
$$\sqrt{x}>x-6$$
$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-6<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x\ge 0}\ \textit{sovrabbondante} \\ x-6\ge 0 \\ x>x^2-12x+36 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x<6 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 6 \\ x^2-13x+36<0 \quad (x-4)(x-9)<0 \quad 4<x<9 \end{cases}$$
$$\underbrace{0\le x<6 \ \vee\ 6\le x<9}_{0\le x<9}$$

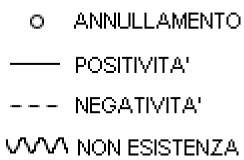
La condizione di esistenza è: $x\ge 0$
Dunque il Denominatore:

- esiste solo quando $x\ge 0$ (NON esiste per $x<0$) ed è
- positivo per $0\le x<9$
- nullo per $x=9$ (invece, come si può controllare, per $x=0$ è > 0)
- negativo per $x>9$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.



SIMBOLOGIA:



Osserviamo che
per $x = 0$
numeratore e denominatore
sono entrambi >0,
quindi la frazione è >0
e la disequazione
NON è verificata

La disequazione è verificata per $\boxed{4<x<9}$.

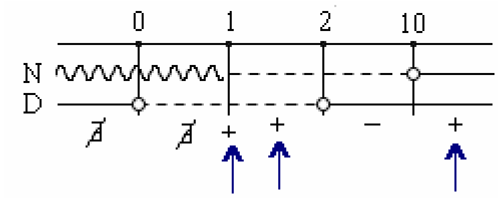
Se invece il verso fosse stato >, la disequazione avrebbe avuto come soluzioni $0\le x<4 \ \vee\ x>9$.

15) $\boxed{\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-2x}>0}$

$N>0 \quad \sqrt{x-1}-3>0 \quad \sqrt{x-1}>3$

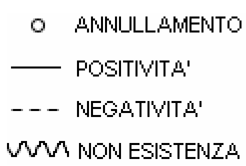
Sappiamo che per risolvere questa disequazione
non è necessario porre alcuna condizione;
tuttavia, della condizione di realtà $x-1\ge 0,\ x\ge 1$
occorrerà tener conto nello schema finale!
$x-1>9; \quad x>10$
Dunque il Numeratore: è >0 *per* $x>10$;
ma esiste solo per $x\ge 1$ (*non esiste quindi per* $x<1$)
perciò sarà <0 *quando* $1\le x<10$.
Come si può controllare, il Numeratore è $=0$ *quando* $x=10$.

$D>0 \quad x^2-2x>0, \quad x(x-2)>0, \quad x<0 \vee x>2$



$\boxed{1\le x<2 \ \vee\ x>10}$

SIMBOLOGIA:



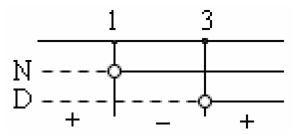
Osserviamo che
per $x = 1$
numeratore e
denominatore
sono entrambi <0,
quindi la frazione è >0
e la disequazione
è verificata

16) $\boxed{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}<2}$

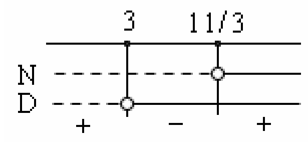
La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3}\ge 0 \\ \\ \dfrac{x-1}{x-3}<4 \end{cases}$$

$\dfrac{x-1}{x-3}\ge 0$



$\dfrac{x-1}{x-3}<4 \Leftrightarrow \dfrac{3x-11}{x-3}>0$



Ti invito
ad andare a vedere,
a pag. 41,
un bel metodo
per risolvere
rapidissimamente
le disequazioni fratte,
aventi N e D
entrambi di 1° grado

La condizione $\dfrac{x-1}{x-3}\ge 0$ è verificata per $x\le 1 \vee x>3$

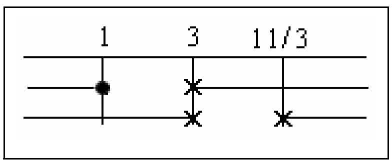
L'altra condizione $\dfrac{x-1}{x-3}<4$

equivale a $\dfrac{x-1}{x-3}-4<0; \quad \dfrac{x-1-4x+12}{x-3}<0; \quad \dfrac{11-3x}{x-3}<0; \quad \dfrac{3x-11}{x-3}>0$

ed e quindi verificata per $x<3 \vee x>11/3$

Il sistema diventa dunque

$$\begin{cases} x\le 1 \vee x>3 \\ x<3 \vee x>11/3 \end{cases}$$



e le sue soluzioni, dunque anche le soluzioni della disequazione proposta, sono

$\boxed{x\le 1 \vee x>\dfrac{11}{3}}$