C) LE EQUAZIONI COL SIMBOLO DI VALORE ASSOLUTO

Iniziamo da alcuni casi particolari.

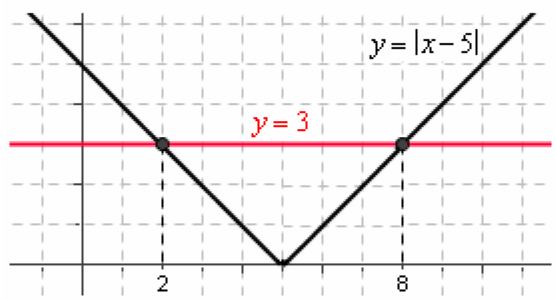
1) $\boxed{|x-5|=3}$

Il valore assoluto di un numero è uguale a 3 quando quel numero vale +3 oppure vale –3 !

Quindi:

$$\boxed{x-5=\pm 3}\left\langle \begin{array}{ll} x-5=3 & \boxed{x=8} \\ x-5=-3 & \boxed{x=2} \end{array}\right.$$

Graficamente:



In generale,
un'equazione della forma

$$\boxed{|\mathrm{A}(x)|=\mathrm{p}\quad (\mathrm{p}\in\mathbb{R},\ \mathrm{p}>0)}$$

è equivalente
alla coppia di equazioni

$$\mathrm{A}(x)=\pm\mathrm{p}$$

ossia equivale ad

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{p}\ \vee\ \mathrm{A}(x)=-\mathrm{p}$$

Come risulta da quanto detto sulla "manipolazione di grafici" (Volume 2, pag. 114 e seguenti)
il grafico della funzione $y=|x-5|$ si ottiene

♪ **traslando** a *destra* di 5 unità il grafico della $y=|x|$,
OPPURE

♫ **disegnando il grafico della retta $y=x-5$,
ed eliminando poi la sua parte con ordinate negative
per sostituirla con la sua *simmetrizzazione*
rispetto all'asse delle ascisse**.

2) $\boxed{|x-5|=-3}$

Si vede immediatamente che è $\boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$:
un valore assoluto è sempre positivo o nullo, non potrà mai essere negativo.

Un'equazione della forma $\boxed{|\mathrm{A}(x)|=-\mathrm{p}\quad (\mathrm{p}\in\mathbb{R},\ \mathrm{p}>0)}$ è sempre IMPOSSIBILE

3) $\boxed{|x-5|=0}$

Il valore assoluto di un numero è 0 quando, e solo quando, quel numero è 0:
$\boxed{x-5=0}$, $\boxed{x=5}$

Un'equazione della forma $\boxed{|\mathrm{A}(x)|=0}$ è equivalente all'equazione $\mathrm{A}(x)=0$

4) $\boxed{|2x-1|=|x+4|}$

Due numeri hanno ugual valore assoluto quando sono uguali, oppure quando sono opposti!

$$\boxed{2x-1=\pm(x+4)}\left\langle \begin{array}{ll} 2x-1=x+4; & \boxed{x=5} \\ 2x-1=-x-4;\quad 3x=-3; & \boxed{x=-1} \end{array}\right.$$

Un'equazione della forma

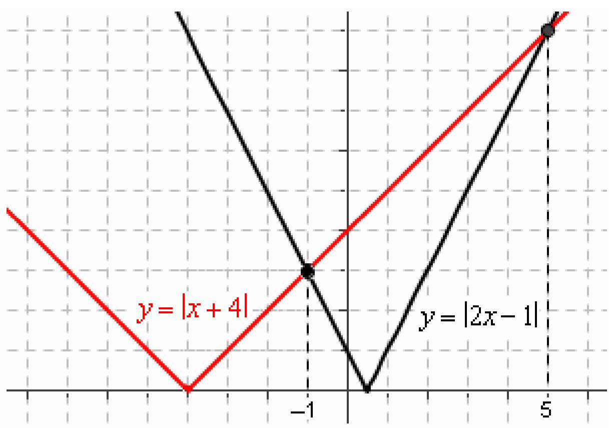
$$\boxed{|\mathrm{A}(x)|=|\mathrm{B}(x)|}$$

è equivalente
alla coppia di equazioni

$$\mathrm{A}(x)=\pm\mathrm{B}(x)$$

ossia equivale ad

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)\ \vee\ \mathrm{A}(x)=-\mathrm{B}(x)$$



5)

$\boxed{|x-3| = 2x-1}$

Innanzitutto, un valore di x, per essere soluzione di questa equazione ,
dovrà necessariamente soddisfare alla condizione

$\boxed{2x-1 \ge 0 \ \ (x \ge 1/2)}$.

Se infatti un dato x NON soddisfa a tale condizione, quell'x NON può ambire ad essere soluzione:
il valore assoluto di un numero non può mai essere negativo.
Nell'ambito di quei valori di x per cui è $2x-1 \ge 0$,
saranno soluzioni gli x per i quali il numero $x-3$ ha, rispetto al numero $2x-1$,
a) valore uguale b) oppure valore opposto. Quindi:

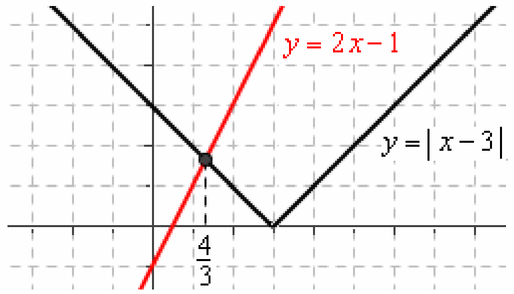
$$x-3 = \pm(2x-1) \left\langle \begin{array}{l} x-3 = 2x-1, \ \ -x = 2, \ \ \cancel{x=-2} \ \ \textit{non accettabile: non è} \ge 1/2 \\ x-3 = -2x+1, \ \ 3x = 4, \ \ \boxed{x = 4/3} \end{array} \right.$$

Un'equazione della forma

$\boxed{|\mathrm{A}(x)| = \mathrm{B}(x)}$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \mathrm{B}(x) \ge 0 \\ \mathrm{A}(x) = \pm \mathrm{B}(x) \end{cases}$$



6)

$\boxed{|x-1| + |x-4| + x = 11}$

Qui, **in presenza di più di una espressione entro le stanghette di valore assoluto**,
la risoluzione è più impegnativa, perché occorre *distinguere diversi casi.*

Innanzitutto, *studiamo il segno di ognuna delle espressioni entro le stanghette.*
Cosa vuol dire?
Vuol dire che *per ciascuna delle espressioni entro le stanghette, dobbiamo stabilire*:

- *per quali valori di x l'espressione in gioco è positiva*
- *per quali valori di x si annulla*
- *per quali valori di x è negativa*

Certo! Perché, ad esempio,

- per i valori di x per i quali l'espressione $x-1$ è positiva (≥ 0), avremo $|x-1| = x-1$
- per i valori di x per i quali l'espressione $x-1$ è negativa (≤ 0), avremo $|x-1| = -(x-1) = 1-x$

e quindi in base a questo *studio del segno* potremo sciogliere correttamente le stanghette di val. assoluto.

Per lo studio del segno di un'espressione,
come già abbiamo visto nel caso delle disequazioni di grado superiore al 2° o fratte,
basterà domandarsi per quali valori di x l'espressione in gioco è >0,
perché poi le altre due risposte "verranno di conseguenza".

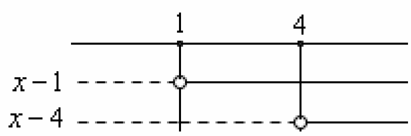
Successivamente allo *studio* dei segni, tracceremo uno *schema* "per il *confronto* dei segni",
(= "*quadro sinottico*") che ci darà una "visione panoramica" dei segni delle varie quantità prese in esame,
e ci permetterà di elaborare una casistica "per intervalli".
Dopodiché …
Ma facciamo riferimento all'esercizio specifico considerato, perché così si capirà meglio.
Dunque:

$\boxed{|x-1| + |x-4| + x = 11}$

a) STUDIO DEL SEGNO:

$$\begin{array}{ll} x-1>0 & x>1 \\ x-4>0 & x>4 \end{array}$$

b) QUADRO SINOTTICO:
("sinottico" vuol dire "che fa vedere le cose tutte assieme")



Simbologia
linea continua: espressione >0
linea tratteggiata: espressione <0
pallino vuoto: espressione = 0

c) DISTINZIONE DI CASI (3 intervalli, 3 casi)

1° caso: per $\boxed{x \le 1}$ (caso in cui le espressioni tra le stanghette sono entrambe negative) l'equaz. diventa:

$$\underbrace{\mathbf{1-x}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \le 0\\ \text{è l'opposto}\\ \text{di quel numero}}} + \underbrace{\mathbf{4-x}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \le 0\\ \text{è l'opposto}\\ \text{di quel numero}}} + x = 11;\ \ldots\ \boxed{x=-6}\ \textit{accettabile (rientra nell'intervallo considerato)}$$

2° caso: per $\boxed{1 \le x \le 4}$ (caso in cui le espressioni tra le stanghette sono: positiva la 1ª , negativa la 2ª)
l'equazione diventa:

$$\underbrace{\mathbf{x-1}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \ge 0\\ \text{è il numero}\\ \text{stesso}}} + \underbrace{\mathbf{4-x}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \le 0\\ \text{è l'opposto}\\ \text{di quel numero}}} + x = 11;\ \ldots\ \cancel{x=8}\ \textit{non accettabile (non rientra nell'intervallo considerato)}$$

3° caso: per $\boxed{x \ge 4}$ (caso in cui le espressioni tra le stanghette sono entrambe positive) l'equazione diventa:

$$\underbrace{\mathbf{x-1}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \ge 0\\ \text{è il numero}\\ \text{stesso}}} + \underbrace{\mathbf{x-4}}_{\substack{\text{il val. ass.}\\ \text{di un numero}\\ \ge 0\\ \text{è il numero}\\ \text{stesso}}} + x = 11;\ \ldots\ \boxed{x=16/3}\ \textit{accettabile (rientra nell'intervallo considerato)}$$

Può essere utile osservare che **in pratica l'equazione data si è così ricondotta a più "sistemi *misti* "** (formati, cioè, da equazioni + disequazioni) separati da "vel" logici:

$$\boxed{|x-1|+|x-4|+x=11} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x \le 1 \\ 1-x+4-x+x=11 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ x-1+4-x+x=11 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} x \ge 4 \\ x-1+x-4+x=11 \end{cases}}$$

In un sistema misto, si risolvono le *equazioni* e si accettano, fra le soluzioni trovate, solo quelle che soddisfano anche alle *disequazioni* presenti nel sistema.

… ed ecco la **risoluzione grafica**!

Il grafico di una funzione che presenti x più di una volta entro le stanghette di valore assoluto si traccia, in generale, studiando il segno di ogni espressione entro le stanghette poi facendo lo "schema per il confronto dei segni" e infine **distinguendo fra i vari intervalli**.

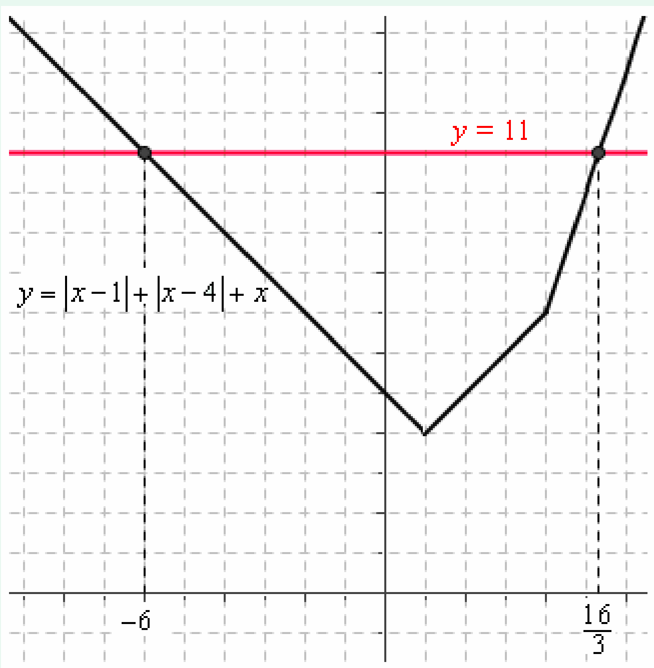
Nel nostro esempio, la funzione a primo membro
$$y=|x-1|+|x-4|+x$$
diventa:

per $x \le 1$: $\quad y = 1-x+4-x+x;\ \boxed{y=5-x}$

per $1 \le x \le 4$: $\quad y = x-1+4-x+x;\ \boxed{y=x+3}$

per $x \ge 4$: $\quad y = x-1+x-4+x;\ \boxed{y=3x-5}$

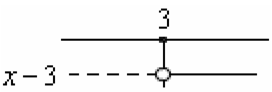
A seconda delle varie "fasce di ascisse", si ottiene un "pezzo" di una differente funzione; i vari "pezzi" si "tengono per mano".



- Anche l'equazione del precedente esempio 5)
  $\boxed{|x-3| = 2x-1}$
  avrebbe potuto essere risolta, in alternativa, con questo metodo dello studio del segno, riferito all'*unica* espressione che in questo caso, compariva entro le stanghette:

$|x-3| = 2x-1$

$x-3>0 \quad x>3$



Per $x \le 3$: $\quad 3-x=2x-1;\ \ -3x=-4;\ \boxed{x=4/3}$

Per $x \ge 3$: $\quad x-3=2x-1;\ \ -x=2;\ \cancel{x=-2}$ *non acc.*

7) Vediamo un altro esempio.

$$\left|x^2-9\right|-\left|8-x\right|=x^2$$

Innanzitutto, **se si preferisce, è possibile portare sotto la forma**

$$\boxed{\left|x^2-9\right|-\left|x-8\right|=x^2}$$

perché $\left|8-x\right|=\left|x-8\right|$ (**numeri opposti hanno evidentemente ugual valore assoluto**).
L'espressione $x-8$ è più facile da gestire senza errori, rispetto alla $8-x$.

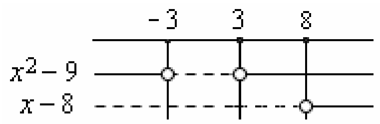
Si potrebbe anche, sempre per maggiore comodità, portare il termine preceduto dal segno – *dall'altra parte dell' =, in modo da far sì che sia preceduto da un +;*
tuttavia, volutamente, lo manterremo a 1° membro: *basterà stare un po' attenti!*

Dunque:

$$\boxed{\left|x^2-9\right|-\left|x-8\right|=x^2}$$

a) STUDIO DEL SEGNO: $x^2-9>0 \quad x<-3 \vee x>3$
$x-8>0 \quad x>8$

b) QUADRO SINOTTICO:



c) DISTINZIONE DI CASI

1° caso: $x\le -3 \quad \cancel{x^2}-9-\left(8-x\right)=\cancel{x^2}$ ... $\cancel{x=17}$ *non accettabile* (*non è* ≤ -3)

2° caso: $-3\le x\le 3 \quad 9-x^2-\left(8-x\right)=x^2$ ... $2x^2-x-1=0;\ \boxed{x=1} \vee \boxed{x=-\frac{1}{2}}$

3° caso: $3\le x\le 8 \quad \cancel{x^2}-9-\left(8-x\right)=\cancel{x^2}$ ... $\cancel{x=17}$ *non acc.* (*non è compreso fra* 3 *e* 8)

(*avremmo anche potuto raggruppare il 1° e il 3° caso nell'unico caso* $x\le -3 \vee 3\le x\le 8$)

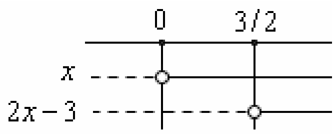
4° caso: $x\ge 8 \quad \cancel{x^2}-9-\left(x-8\right)=\cancel{x^2}$ ... $\cancel{x=-1}$ *non acc.* (*non è* ≥ 8)

8) Ancora:

$$\boxed{\left|x\right|+\left|2x-3\right|=3}$$

a) STUDIO DEL SEGNO: $x>0$
$2x-3>0 \quad x>3/2$

b) QUADRO SINOTTICO:



c) DISTINZIONE DI CASI

1° caso: $x\le 0 \quad -x+3-2x=3;\ -3x=0;\ \boxed{x=0}$

2° caso: $0\le x\le 3/2 \quad x+3-2x=3;\ -x=0;\ \boxed{x=0}$

3° caso: $x\ge 3/2 \quad x+2x-3=3;\ 3x=6;\ \boxed{x=2}$

E' "normale" che la soluzione $x=0$ sia stata trovata due volte.
Infatti, **I CASI DA NOI CONSIDERATI NON SONO PERFETTAMENTE "DISGIUNTI"**,
perché *ciascun caso ha in comune col precedente e col successivo l'estremità di un intervallo.*
Ora, se fortuitamente capita che una soluzione dell'equazione
stia proprio lì, nell'estremità di un intervallo,
allora la soluzione in questione si presenterà per due volte,
in relazione sia all'intervallo "verso sinistra" che a quello "verso destra".

VOLENDO, SI POTREBBE LAVORARE CON CASI PERFETTAMENTE DISGIUNTI:
facendo riferimento, per comodità, all'ultima equazione, casi disgiunti sarebbero, ad esempio,
$x<0,\ \ 0\le x<3/2,\ \ x\ge 3/2$
oppure
$x\le 0,\ \ 0<x\le 3/2,\ \ x>3/2$
oppure …

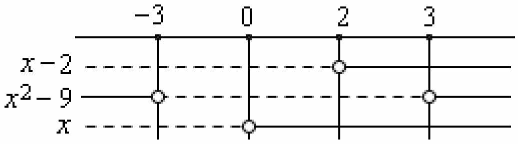
La possibilità di operare coi $\le, \ge$ sembra però preferibile perché più comoda.

9) Un ulteriore esempio, con risoluzione grafica.

$$\boxed{|x-2|+x^2=|x^2-9|+|x|+7}$$

a) STUDIO DEL SEGNO:
$x-2>0 \quad x>2$
$x^2-9>0 \quad x<-3 \vee x>3$
$x>0$

b) QUADRO SINOTTICO:



c) DISTINZIONE DI CASI

$x \le -3$

$\cancel{-x}+2\,\cancel{+x^2}=\cancel{x^2}-9\,\cancel{-x}+7$

$+2=-2$ impossibile

Pertanto, nell'intervallo $(-\infty, -3]$ non c'è nessuna soluzione.

$-3 \le x \le 0$

$\cancel{-x}+2+x^2=-x^2+9\,\cancel{-x}+7; \quad 2x^2=14; \quad x^2=7$

$x=\pm\sqrt{7}\ \Big\langle\ \boxed{-\sqrt{7}} \approx -2{,}65$; $\cancel{+\sqrt{7}}$ *non accettabile (non è compreso fra −3 e 0)*

$0 \le x \le 2$

$-x+2+x^2=-x^2+9+x+7; \quad 2x^2-2x-14=0; \quad x^2-x-7=0$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+28}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{29}}{2}=\Big\langle\ \cancel{\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}} \approx -2{,}19$ *non accettabile (non è compreso fra 0 e 2)*; $\cancel{\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}} \approx 3{,}19$ *non acc. (non è compreso fra 0 e 2)*

$2 \le x \le 3$

$\cancel{x}-2+x^2=-x^2+9\,\cancel{+x}+7; \quad 2x^2=18; \quad x^2=9$

$x=\pm 3=\Big\langle\ \cancel{-3}$ *non acc. (non è compreso fra 2 e 3)*; $\boxed{3}$

$x \ge 3$

$\cancel{x}\,\cancel{-2}\,\cancel{+x^2}=\cancel{x^2}\,\cancel{-9}\,\cancel{+x}\,\cancel{+7}$

Questa equazione è *indeterminata*,
è verificata per *qualsiasi* valore di x:
dunque TUTTI gli $x \ge 3$ sono soluzione.

In definitiva, le soluzioni della nostra equazione sono: $\boxed{x=-\sqrt{7}}$ e tutti gli infiniti valori $\boxed{x \ge 3}$

RISOLUZIONE GRAFICA

Abbiamo già risolto graficamente le equazioni di cui agli esempi 1), 4), 5) e 6).
L'esempio 9) è ancora più complicato a questo proposito, perché il simbolo di valore assoluto compare per ben tre volte, e inoltre compare sia a primo che a secondo membro.

Se vogliamo **risolvere graficamente** un'equazione nella quale l'incognita si presenta più di una volta entro le stanghette di valore assoluto, dovremo:

a) **STUDIARE IL SEGNO** di ogni singola espressione entro le stanghette
b) compilare un "**QUADRO SINOTTICO**" che riassuma tale studio dei segni
c) e, infine, **DISTINGUERE I VARI CASI** cioè andare a calcolare "cosa diventa" la funzione a *primo membro* in ciascuno degli intervalli relativi alla sua casistica, e lo stesso per la funzione a *secondo membro*.
I due grafici del 1° e del 2° membro verranno dunque tracciati "per pezzi", "per intervalli".

Illustriamo il procedimento riferendoci all'esempio precedente $\underbrace{|x-2|+x^2}_{1°\ membro} = \underbrace{|x^2-9|+|x|+7}_{2°\ membro}$

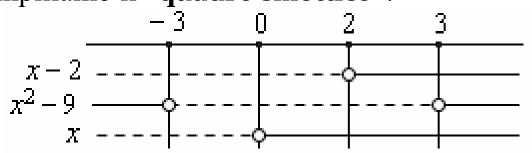
a) **Studiamo il segno** di ogni singola espressione entro le stanghette

$x-2>0 \quad x>2$

$x^2-9>0 \quad x<-3 \vee x>3$

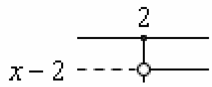
$x>0$

b) compiliamo il "**quadro sinottico**":

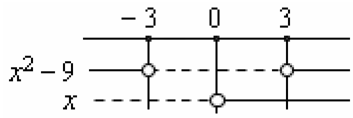


… volendo, possiamo fare due "quadri" separati,

uno per il 1° membro



e l'altro per il 2°:



c) **distinguiamo i vari casi, prima sul 1° e poi sul 2° membro**

1° membro

Per la funzione a primo membro

$y=|x-2|+x^2$

occorre distinguere fra i due casi

$x \le 2$ e $x \ge 2$:

- con $x \le 2$ la funz. diventa: $y=-x+2+x^2=x^2-x+2$ (arco di parabola, concavità verso l'alto)
- mentre con $x \ge 2$ la funzione diventa: $y=x-2+x^2=x^2+x-2$
  (ancora un arco di parabola, diversa dalla precedente, ma sempre con la concavità verso l'alto)

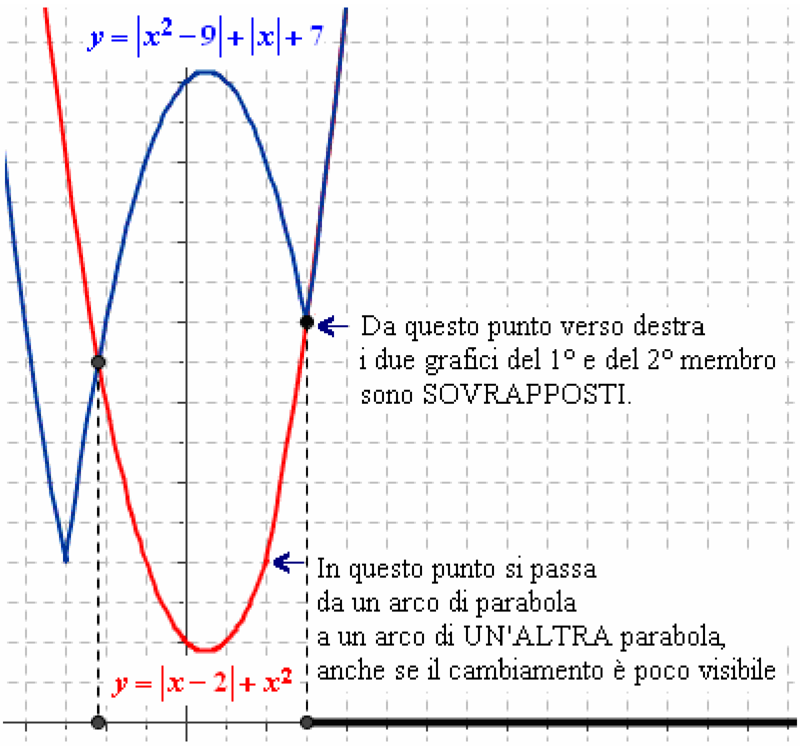
2° membro

Per la funzione a secondo membro $y=|x^2-9|+|x|+7$

occorre distinguere fra i casi: $x \le -3, \quad -3 \le x \le 0, \quad 0 \le x \le 3, \quad x \ge 3$.

- Con $x \le -3$ la funzione diventa: $y=x^2-9-x+7=x^2-x-2$;
- con $-3 \le x \le 0$ la funzione diventa: $y=-x^2+9-x+7=-x^2-x+16$;
- con $0 \le x \le 3$ la funzione diventa: $y=-x^2+9+x+7=-x^2+x+16$;
- con $x \ge 3$ la funzione diventa: $y=x^2-9+x+7=x^2+x-2$.

Si disegna il grafico della funzione a 1° membro "per intervalli",
si fa lo stesso con la funzione a 2° membro (naturalmente, sullo stesso riferimento cartesiano),
e si riconoscono dalla figura le soluzioni, che sono poi
quei valori di *x* per i quali i due grafici si intersecano, oppure sono sovrapposti.



La risoluzione grafica ci permette, di norma, soltanto di APPROSSIMARE le soluzioni. Nella nostra figura, ad esempio, si vede che c'è una soluzione fra –3 e –2 (più vicina a –2 che a –3), ma per trovarne un valore più preciso occorre la risoluzione algebrica, oppure occorre utilizzare il computer per affinare la risoluzione grafica tramite un software apposito, oppure ancora occorrerebbe partire dalla grossolana approssimazione grafica per utilizzare i metodi della cosiddetta "analisi numerica" (metodo di bisezione, delle tangenti, delle corde, del punto fisso …) onde migliorare l'approssimazione.

Viceversa, una risoluzione grafica può essere utilissima per controllare l'esattezza della risoluzione algebrica!

10) Ultimissimo esempio? Ma sì, dài …

$\boxed{|x+2| = 4-|x|}$

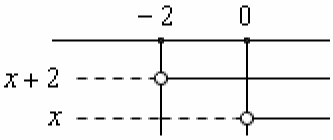
RISOLUZIONE ALGEBRICA

a) STUDIAMO IL SEGNO di ogni singola espressione entro le stanghette:

$x+2>0 \quad x>-2$

$x>0$

b) compiliamo il "**QUADRO SINOTTICO**":



c) DISTINGUIAMO I VARI CASI:

$x \le -2: \; -x-2 = 4-(-x); \quad -x-2 = 4+x; \quad -2x = 6 \quad \boxed{x=-3}$

$-2 \le x \le 0: \; x+2 = 4-(-x); \quad \cancel{x}+2 = 4\cancel{+x} \quad$ impossibile

$x \ge 0: \; x+2 = 4-x; \quad 2x = 2 \quad \boxed{x=1}$

RISOLUZIONE GRAFICA

I grafici del 1° e del 2° membro potrebbero essere tracciati facilmente "manipolando" il grafico della "funzione madre" $|x|$: ce la caveremmo brillantemente in un attimo.

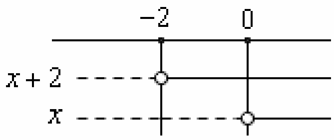
Se invece procediamo con il metodo "standard" …

a) STUDIAMO IL SEGNO di ogni singola espressione entro le stanghette:

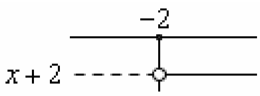
$x+2>0 \quad x>-2$

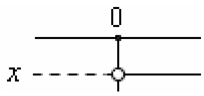
$x>0$

b) compiliamo il "**QUADRO SINOTTICO**":



… oppure due quadri separati per il 1° e per il 2° membro:





NOTA: questa fase b) potrebbe benissimo essere saltata, data la semplicità della situazione!

c) DISTINGUIAMO I VARI CASI

1° membro: $y = |x+2|$

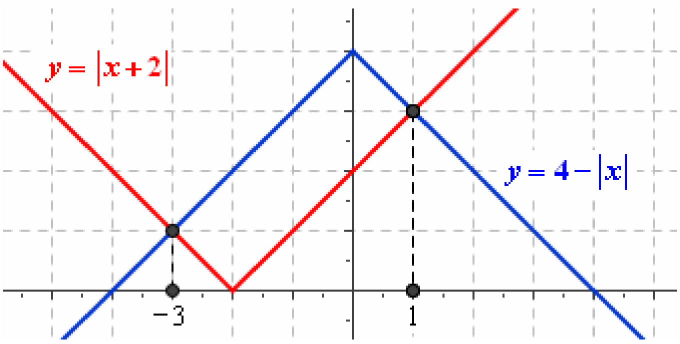
$x \le -2: \; y = -x-2$

$x \ge -2: \; y = x+2$

2° membro: $y = 4-|x|$

$x \le 0: \; y = 4-(-x) = x+4$

$x \ge 0: \; y = -x+4$



… E DALLA FIGURA "LEGGIAMO" LE SOLUZIONI,

che sono poi le ascisse –3 e 1 dei due punti di intersezione.

Ribadiamolo: in questo caso molto semplice, i grafici del 1° e del 2° membro avrebbero potuto essere disegnati quasi istantaneamente, lavorando per "manipolazioni" sul grafico della "funzione madre" $y = |x|$