EQUAZIONI E DISEQUAZIONI UN PO' PIU' DIFFICILI

a) $\left|2|x-3|-x+2\right|<6-x$

In questa **disequazione** abbiamo "**valore assoluto internamente a valore assoluto**".

Cominciamo a considerare l'espressioncina col valore assoluto *più interna*:
siamo condotti alla distinzione di casi
$x \le 3,\ x \ge 3$.

Avremo allora

$$\begin{cases} x \le 3 \\ |2(3-x)-x+2|<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ |2(x-3)-x+2|<6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3 \\ |6-2x-x+2|<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ |2x-6-x+2|<6-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3 \\ |8-3x|<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ |x-4|<6-x \end{cases}$$

Ora, nell'ambito di ciascuno dei due sistemi, siamo costretti ad un'altra distinzione di casi:

$$\begin{cases} x \le 3 \\ \begin{cases} x \le 8/3 \\ 8-3x<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 8/3 \\ 3x-8<6-x \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ \begin{cases} x \le 4 \\ 4-x<6-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 4 \\ x-4<6-x \end{cases} \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x \le 3 \\ \begin{cases} x \le 8/3 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 8/3 \\ x<7/2 \end{cases} \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ \begin{cases} x \le 4 \\ \text{sempre verificata} \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 4 \\ x<5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3 \\ 1<x\le \frac{8}{3} \vee \frac{8}{3} \le x < \frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 4 \vee 4 \le x < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 3 \\ 1<x<\frac{7}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ x<5 \end{cases}$$

$$1<x\le 3 \quad \vee \quad 3 \le x<5$$

perciò, in definitiva,

$$\boxed{1<x<5}$$

b) $\left|3-|x+4|\right|=\left|1-|x+4|\right|$

Questa **equazione** è un po' più agevole da risolvere rispetto alla disequazione precedente;
infatti è possibile scrivere

$$3-|x+4|=\pm(1-|x+4|)$$

$$3\cancel{-|x+4|}=1\cancel{-|x+4|} \ \vee\ 3-|x+4|=-1+|x+4|$$

$$\text{impossibile} \quad \vee\ -2|x+4|=-4$$

$$|x+4|=2$$

$$x+4=\pm 2 \left\langle \begin{array}{l} x+4=2;\ \boxed{x=-2} \\ x+4=-2;\ \boxed{x=-6} \end{array} \right.$$

c) $\sqrt{x^2+3|x|} < x+2$

Questa è una **disequazione "mista"**, ossia tanto *irrazionale* quanto *contenente l'incognita entro le stanghette di valore assoluto.*

1° MODO

Possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione col *valore assoluto*, e allora distingueremo per prima cosa i due casi
$x \ge 0$ e $x \le 0$
(i due sistemi sono idealmente separati da un "vel" logico):

$$\begin{cases} x \le 0 \\ \sqrt{x^2-3x} < x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x^2+3x} < x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x \le 0} \\ \boxed{\begin{matrix} x^2-3x \ge 0 \\ x+2>0 \\ x^2-3x < (x+2)^2 \end{matrix}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x \ge 0} \\ \boxed{\begin{matrix} x^2+3x \ge 0 \\ x+2>0 \\ x^2+3x < (x+2)^2 \end{matrix}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ x(x-3) \ge 0; \quad x \le 0 \vee x \ge 3 \\ x > -2 \\ \cancel{x^2} - 3x < \cancel{x^2} + 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ x(x+3) \ge 0; \quad x \le -3 \vee x \ge 0 \\ x > -2 \\ \cancel{x^2} + 3x < \cancel{x^2} + 4x + 4; \; -x < 4; \; x > -4 \end{cases}$$

$$Soluzioni\ sistema: x \ge 0$$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ x \le 0 \vee x \ge 3 \\ x > -2 \\ -7x < 4; \; x > -\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

$$Soluzioni\ sistema: -\frac{4}{7} < x \le 0$$

In definitiva, abbiamo $-\frac{4}{7} < x \le 0 \;\vee\; x \ge 0$ e dunque $\boxed{x > -\frac{4}{7}}$

2° MODO

Oppure possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione *irrazionale*, e allora scriveremo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^2+3|x| \ge 0 \\ x+2>0 \\ x^2+3|x| < (x+2)^2 \end{cases}$$

dopodiché distingueremo i due casi $x \ge 0$ e $x \le 0$ e avremo

$$\begin{cases} x \le 0 \\ x^2-3x \ge 0 \\ x+2>0 \\ x^2-3x < (x+2)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+3x \ge 0 \\ x+2>0 \\ x^2+3x < (x+2)^2 \end{cases}$$

ritornando così alla stessa situazione algebrica precedente,

con (ovviamente) le medesime soluzioni di prima: $\boxed{x > -\frac{4}{7}}$

d) $\sqrt{|x-8|} > |x-1|+1$

1° MODO

Possiamo pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione col *valore assoluto*, e allora distingueremo per prima cosa i tre casi

$x \le 1,\ 1 \le x \le 8,\ x \ge 8$

(i tre sistemi sono idealmente separati da un “vel” logico):

$$\begin{cases} x \le 1 \\ \sqrt{8-x} > 1-x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ \sqrt{8-x} > 2-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ \begin{cases} 2-x<0 \\ 8-x \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 8-x > (2-x)^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ \begin{cases} x>2 \\ x \le 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \le 2 \\ 8-x > 4-4x+x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ 2<x \le 8 \vee \begin{cases} x \le 2 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ 2<x \le 8 \vee \begin{cases} x \le 2 \\ -1<x<4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ 2<x \le 8 \vee -1<x \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1 \\ -1<x \le 8 \end{cases}$$

$$\boxed{-1<x \le 1}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 8 \\ \sqrt{8-x} > x\cancel{-1}\cancel{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ 8-x \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ 8-x > x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ x \le 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+x-8<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 8 \\ x<0 \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 8 \\ x<0 \vee 0 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 8 \\ x < \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{1 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}}$$

$$\begin{cases} x \ge 8 \\ \sqrt{x-8} > x\cancel{-1}\cancel{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ x-8 \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ x-8 > x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 8 \\ \begin{cases} x<0 \\ x \ge 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x+8<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 8 \\ \text{imp.} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x+8<0 \ \text{imp.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 8 \\ \text{imp.} \vee \text{imp.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 8 \\ \text{imp.} \end{cases}$$

Sistema impossibile

In definitiva, le soluzioni della disequazione sono $-1<x \le 1 \ \vee\ 1 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}$ ovvero $\boxed{-1<x<\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}}$

2° MODO

MEGLIO, IN QUESTO CASO,
pensare innanzitutto al fatto che si tratti di una disequazione *irrazionale*,
scrivendo dunque la coppia di sistemi:

$$\begin{cases} |x-1|+1<0 \ \text{ imp.} \\ |x-8| \ge 0 \ \text{sempre verif.} \end{cases} \vee \begin{cases} |x-1|+1 \ge 0 \ \text{ sempre verif.} \\ |x-8| > \left(|x-1|+1\right)^2 \end{cases}$$

Sistema impossibile

Quindi la disequazione data finisce per essere equivalente alla

$|x-8| > \left(|x-1|+1\right)^2$,

ossia alla

$|x-8| > |x-1|^2 + 2|x-1|+1;\ \ |x-8| > (x-1)^2+2|x-1|+1;\ \ |x-8| > x^2-2x+2+2|x-1|$

Prova a risolverla e vedrai che troverai, più rapidamente, le stesse soluzioni di prima.