DISEQUAZIONI IRRAZIONALI: CORREZIONI

1)

$\boxed{\sqrt{2x+8} < x}$

$$\begin{cases} 2x+8 \geq 0,\ 2x \geq -8,\ x \geq -4 \\ x > 0 \\ 2x+8 < x^2,\ x^2-2x-8 > 0,\ (x+2)(x-4) > 0,\ x < -2 \vee x > 4 \end{cases}$$

$\boxed{x > 4}$

2)

$\boxed{3\sqrt{x} < x+2}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 > 0,\ x > -2 \\ 9x < x^2+4x+4,\ x^2-5x+4 > 0,\ (x-1)(x-4) > 0,\ x < 1 \vee x > 4 \end{cases}$$

$\boxed{0 \leq x < 1 \ \vee\ x > 4}$

3)

$\boxed{\sqrt{x^2-4} + x < 5}$

$\boxed{\sqrt{x^2-4} < 5-x}$

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0,\quad x^2 \geq 4,\ |x| \geq 2,\ x \leq -2 \ \vee\ x \geq 2 \\ 5-x > 0,\ -x > -5,\ x < 5 \\ \cancel{x^2} - 4 < 25 - 10x \cancel{+x^2},\ 10x < 29,\ x < 29/10 \end{cases}$$

$\boxed{x \leq -2 \ \vee\ 2 \leq x < 29/10}$

5)

$\boxed{\sqrt{30-x} < x}$

$$\begin{cases} 30-x \geq 0,\ -x \geq -30,\ x \leq 30 \\ x > 0 \\ 30-x < x^2,\ x^2+x-30 > 0,\ (x+6)(x-5) > 0,\ x < -6 \vee x > 5 \end{cases}$$

$\boxed{5 < x \leq 30}$

6)

$\boxed{\sqrt{x^2-2x+5} < x}$

$$\begin{cases} x^2-2x+5 \geq 0,\quad \textit{sempre verificata}\ (\Delta < 0) \\ x > 0 \\ \cancel{x^2} - 2x + 5 < \cancel{x^2},\ 2x-5 > 0,\ x > 5/2 \end{cases}$$

$\boxed{x > 5/2}$

7)

$\boxed{\sqrt{x^2+1} \leq x+3}$

$$\begin{cases} x^2+1 \geq 0,\quad \textit{sempre verificata} \\ x+3 \geq 0,\ x \geq -3 \\ \cancel{x^2} + 1 \leq \cancel{x^2} + 6x + 9,\ -6x \leq 8,\ x \geq -4/3 \end{cases}$$

$\boxed{x \geq -4/3}$

9)

$$\boxed{2\left(\sqrt{x}-x\right)<1-x}$$

$$2\sqrt{x}-2x<1-x$$

$$\boxed{2\sqrt{x}<x+1}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x+1>0,\ \ x>-1 \\ 4x<x^2+2x+1,\ \ x^2-2x+1>0,\ \ \left(x-1\right)^2>0,\quad x\ne 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x\ge 0\ \ ma\ \ x\ne 1}$$

10)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}+1}{2}\le x}$$

$$\sqrt{x}+1\le 2x$$

$$\boxed{\sqrt{x}\le 2x-1}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 2x-1\ge 0,\ \ x\ge 1/2 \\ x\le 4x^2-4x+1,\ \ 4x^2-5x+1\ge 0,\ \ x\le 1/4 \vee x\ge 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x\ge 1}$$

11)

$$\boxed{\sqrt{x+12}>x}$$

$$\begin{cases} x+12\ge 0,\ \ x\ge -12 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ x+12>x^2,\ \ x^2-x-12<0,\ \ \left(x-4\right)\left(x+3\right)<0,\ \ -3<x<4 \end{cases}$$

$$-12\le x<0\ \vee\ \ 0\le x<4$$

$$\boxed{-12\le x<4}$$

12)

$$\boxed{2\sqrt{x}+3>x}$$

$$\boxed{2\sqrt{x}>x-3}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-3<0,\ \ x<3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3\ge 0,\ \ x\ge 3 \\ 4x>x^2-6x+9,\ \ x^2-10x+9<0,\ \ \left(x-1\right)\left(x-9\right)<0,\ \ 1<x<9 \end{cases}$$

$$0\le x<3\ \vee\ \ 3\le x<9$$

$$\boxed{0\le x<9}$$

13)

$$\boxed{\sqrt{2-x}>x}$$

$$\begin{cases} 2-x\ge 0,\ \ x\le 2 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ 2-x>x^2,\quad x^2+x-2<0,\ \ \left(x+2\right)\left(x-1\right)<0,\ \ -2<x<1 \end{cases}$$

$$x<0\ \vee\ \ 0\le x<1$$

$$\boxed{x<1}$$

15)

$$\boxed{\sqrt{x^2-2x-3}>x}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3\ge 0,\ (x+1)(x-3)\ge 0,\ x\le -1 \vee x\ge 3 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 0 \\ \cancel{x^2}-2x-3>\cancel{x^2},\ 2x+3<0,\ x<-3/2 \end{cases}$$

$$x\le -1 \qquad \vee \quad \textit{sistema impossibile}$$

$$\boxed{x\le -1}$$

17)

$$\boxed{\sqrt{x}>\frac{x}{3}}$$

$$\boxed{3\sqrt{x}>x}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \vee \qquad \begin{cases} x\ge 0 \\ 9x>x^2,\ x^2-9x<0,\ x(x-9)<0,\ 0<x<9 \end{cases}$$

$$\textit{sist. imp.} \ \vee \ 0<x<9$$

$$\boxed{0<x<9}$$

19)

$$\boxed{\sqrt{x^2+4}>x-5}$$

$$\begin{cases} x^2+4\ge 0 \ \ \forall x\in\mathbb{R} \\ x-5<0,\ x<5 \end{cases} \vee \begin{cases} x-5\ge 0,\ x\ge 5 \\ \cancel{x^2}+4>\cancel{x^2}-10x+25,\ 10x>21,\ x>21/10 \end{cases}$$

$$x<5 \ \vee \ x\ge 5$$

$$\boxed{\textit{sempre verificata},\ \forall x\in\mathbb{R}}$$

20)

$$\boxed{\sqrt{4x^2+2x+1}>x+1}$$

$$\begin{cases} 4x^2+2x+1\ge 0 \ \text{sempre verificata},\ \forall x\in\mathbb{R}\ (\Delta<0) \\ x+1<0,\ x<-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1\ge 0,\ x\ge -1 \\ 4x^2\cancel{+2x}\cancel{+1}>x^2\cancel{+2x}\cancel{+1},\ 3x^2>0,\ x\ne 0 \end{cases}$$

$$x<-1 \ \vee \ x\ge -1 \ \textit{ma} \ x\ne 0$$

$$\boxed{x\ne 0}$$

21)

$$\boxed{\sqrt{x^2-4x+3}\ge x-1}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0,\ (x-1)(x-3)\ge 0,\ x\le 1 \vee x\ge 3 \\ x-1<0,\ x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1\ge 0,\ x\ge 1 \\ \cancel{x^2}-4x+3\ge \cancel{x^2}-2x+1,\ -2x\ge -2,\ x\le 1 \end{cases}$$

$$x<1 \quad \vee \quad x=1$$

$$\boxed{x\le 1}$$

24)

$$\boxed{\sqrt{x+2}\ge\frac{x-1}{2}}$$

$$\boxed{2\sqrt{x+2}\ge x-1}$$

$$\begin{cases} x+2\ge 0,\ x\ge -2 \\ x-1<0,\ x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1\ge 0,\ x\ge 1 \\ 4x+8\ge x^2-2x+1,\ x^2-6x-7\le 0,\ (x+1)(x-7)\le 0,\ -1\le x\le 7 \end{cases}$$

$$-2\le x<1 \ \vee \ 1\le x\le 7$$

$$\boxed{-2\le x\le 7}$$

26)

$\boxed{\sqrt{7-x}>-5}$

*Affinché sia verificata, basta che il radicale esista in* $\mathbb{R}$!

$7-x\geq 0,\quad \boxed{x\leq 7}$

27)

$\boxed{\sqrt{7-x}>2}$

*In questo caso particolare, sappiamo che la condizione di realtà è sovrabbondante, quindi possiamo evitare di porla*!

$7-x>4,\ -x>-3,\ \boxed{x<3}$

31)

$\boxed{\sqrt{2x-3}<5}$

$$\begin{cases}2x-3\geq 0, \quad x\geq 3/2\\ 2x-3<25,\ \ 2x<28,\ \ x<14\end{cases}$$

$\boxed{3/2\leq x<14}$

34)

$\boxed{\sqrt{x^2-4x+3}\leq 1}$

$$\begin{cases}x^2-4x+3\geq 0,\ \ (x-1)(x-3)\geq 0,\ \ x\leq 1\ \vee\ x\geq 3\\ x^2-4x+3\leq 1,\ \ x^2-4x+2\leq 0,\ \ 2-\sqrt{2}\leq x\leq 2+\sqrt{2}\end{cases}$$

$\boxed{2-\sqrt{2}\leq x\leq 1\ \vee\ 3\leq x\leq 2+\sqrt{2}}$

35)

$\boxed{\sqrt{x-5}\leq\sqrt{3}}$

$$\begin{cases}x-5\geq 0,\ \ x\geq 5\\ x-5\leq 3,\ \ x\leq 8\end{cases}$$

$\boxed{5\leq x\leq 8}$

36)

$\boxed{\sqrt{8-x}<0}$

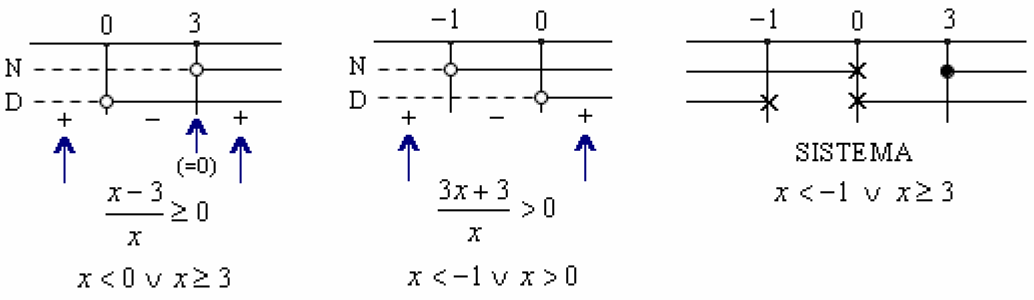
*impossibile : il risultato di una radice quadrata non può mai essere negativo*

38)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x-3}{x}}<2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x}\geq 0, \quad x<0 \vee x\geq 3 \\ \\ \dfrac{x-3}{x}<4, \quad \dfrac{x-3}{x}-4<0, \quad \dfrac{x-3-4x}{x}<0, \quad \dfrac{-3x-3}{x}<0, \quad \underbrace{\dfrac{3x+3}{x}>0}_{\substack{\text{volendo,}\\ \text{semplificabile}\\ \text{per 3}}}, \quad x<-1 \vee x>0 \end{cases}$$

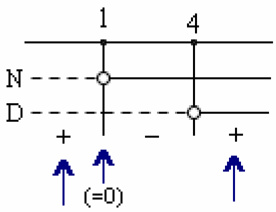
$$\boxed{x<-1 \ \vee \ x\geq 3}$$




40)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}>-3}$$

$$\frac{x-1}{x-4}\geq 0, \quad \boxed{x\leq 1 \vee x>4}$$



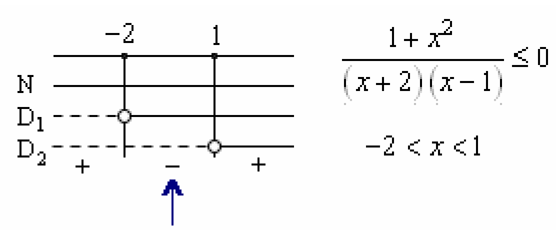

41)

$$\boxed{\sqrt{\frac{1+x^2}{2-x-x^2}}>-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1+x^2}{2-x-x^2}\geq 0; \quad \frac{1+x^2}{x^2+x-2}\leq 0$$

$$\frac{1+x^2}{(x+2)(x-1)}\leq 0$$

*Il Numeratore è sempre strettamente positivo,*
*la frazione quindi non si può annullare*
*ed è negativa quando lo è il Denominatore :*
*ma la disequazione* $(x+2)(x-1)<0$
*(di 2° grado, con* $-2$ *e* $1$ *per soluzioni dell'equazione associata)*
*è verificata quando*
$\boxed{-2<x<1}$.
*La conclusione è confermata dallo schema sottostante :*



42)

$$\sqrt{3x-1} < \sqrt{x+7}$$

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0, \quad x \geq 1/3 \\ x+7 \geq 0, \quad x \geq -7 \\ 3x-1 < x+7, \quad 2x < 8, \quad x < 4 \end{cases}$$

$$\boxed{1/3 \leq x < 4}$$

46)

$$\sqrt{4-2x} \leq \sqrt{3-x}$$

$$\begin{cases} 4-2x \geq 0, \quad x \leq 2 \\ 3-x \geq 0, \quad x \leq 3 \\ 4-2x \leq 3-x, \quad -x \leq -1, \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{1 \leq x \leq 2}$$

47)

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \leq \frac{\sqrt{x+1}}{3}$$

$$3\sqrt{x^2-1} \leq 2\sqrt{x+1}$$

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \quad x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x+1 \geq 0, \quad x \geq -1 \\ 9x^2-9 \leq 4x+4, \quad 9x^2-4x-13 \leq 0, \quad -1 \leq x \leq 13/9 \end{cases}$$

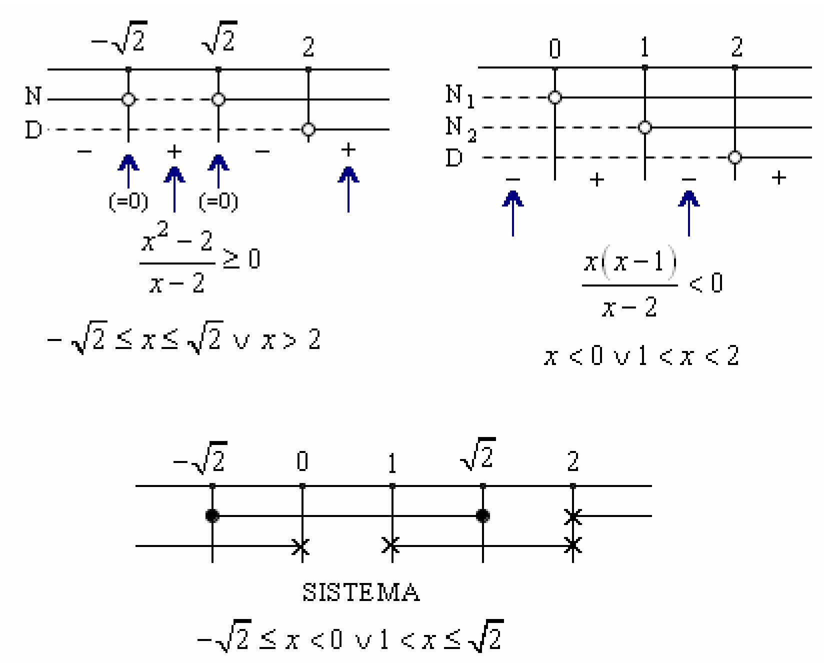
$$\boxed{x = -1 \ \vee \ 1 \leq x \leq 13/9}$$

48)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x^2-2}{x-2}} < 1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-2} \geq 0 \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \vee x > 2 \\ \dfrac{x^2-2}{x-2} < 1 \quad \dfrac{x^2-2}{x-2} - 1 < 0 \quad \dfrac{x^2 \cancel{-2} - x \cancel{+2}}{x-2} < 0 \quad \dfrac{x(x-1)}{x-2} < 0 \quad x < 0 \vee 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\boxed{-\sqrt{2} \leq x < 0 \vee 1 < x \leq \sqrt{2}}$$

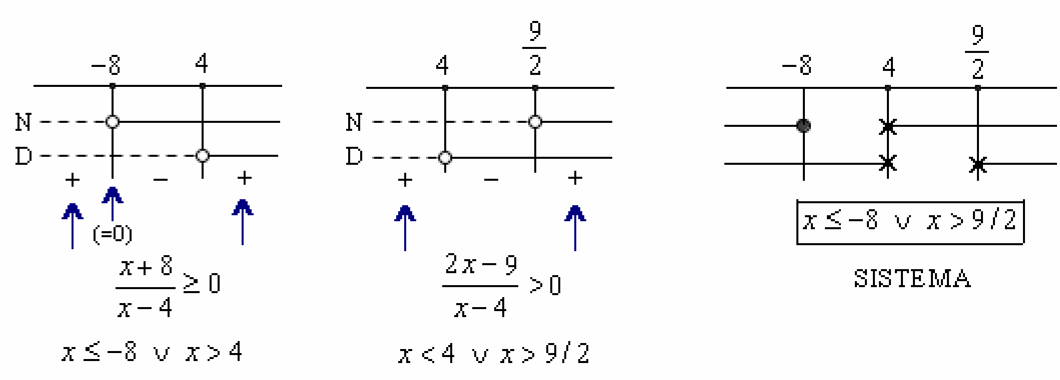


49)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x+8}{x-4}}<5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+8}{x-4}\geq 0 \quad x\leq -8 \ \vee \ x>4 \\ \dfrac{x+8}{x-4}<25 \quad \dfrac{x+8}{x-4}-25<0 \quad \dfrac{x+8-25x+100}{x-4}<0 \quad \dfrac{-24x+108}{x-4}<0 \quad \dfrac{2x-9}{x-4}>0 \quad x<4 \ \vee \ x>9/2 \end{cases}$$

$$\boxed{x\leq -8 \ \vee \ x>9/2}$$

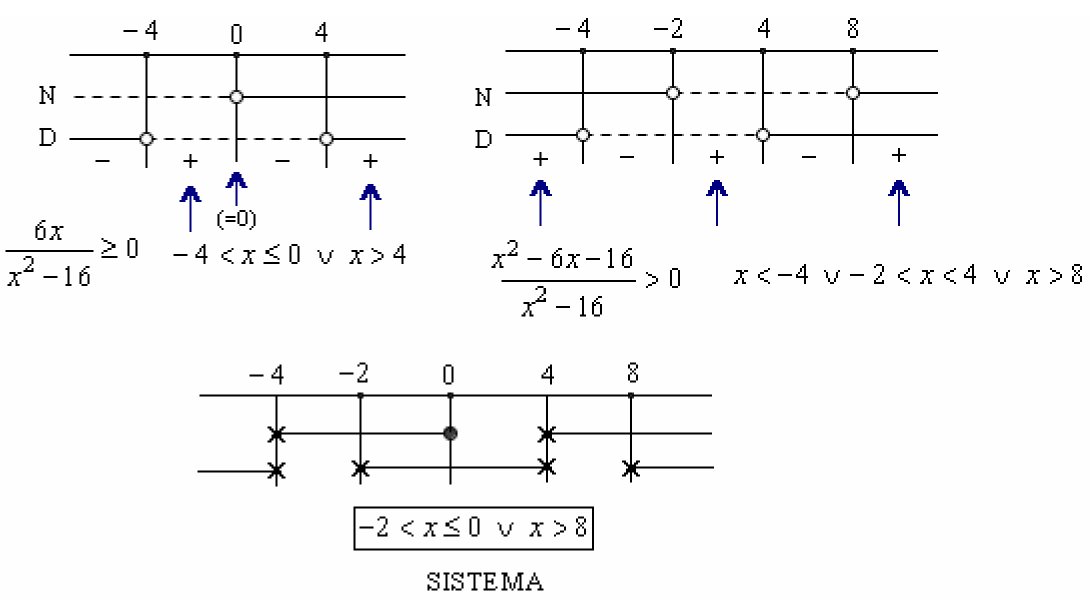



50)

$$\sqrt{\frac{6x}{x^2-16}}<1$$

$$\begin{cases} \dfrac{6x}{x^2-16}\geq 0 \quad -4<x\leq 0 \ \vee \ x>4 \\ \dfrac{6x}{x^2-16}<1, \quad \dfrac{6x}{x^2-16}-1<0, \quad \dfrac{6x-x^2+16}{x^2-16}<0, \quad \dfrac{x^2-6x-16}{x^2-16}>0, \quad x<-4 \ \vee -2<x<4 \ \vee \ x>8 \end{cases}$$

$$\boxed{-2<x\leq 0 \ \vee \ x>8}$$



51)

$\boxed{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}-\sqrt{2x}<0}$

Poniamo le condizioni di realtà dei radicali:

$$\boxed{\begin{array}{l} x-1\geq 0,\ \ x\geq 1 \\ x-3\geq 0,\ \ x\geq 3 \\ 2x\geq 0,\ \ x\geq 0 \end{array}}$$

Trasportiamo un termine a secondo membro
in modo che i due membri siano sicuramente positivi:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}<\sqrt{2x}$

A questo punto eleviamo al quadrato:

$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}\right)^2<\left(\sqrt{2x}\right)^2$

$\cancel{x}-1\cancel{+x}-3+2\sqrt{(x-1)(x-3)}<\cancel{2x}$

$\cancel{2}\sqrt{x^2-4x+3}<\cancel{4}^{2}$

*Scrivere la condizione di realtà* $x^2-4x+3\geq 0$
*sarebbe SUPERFLUO,*
*perché* $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$
*e avevamo già posto prima le condizioni di positività di entrambi i fattori del prodotto*

$\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^2<2^2$

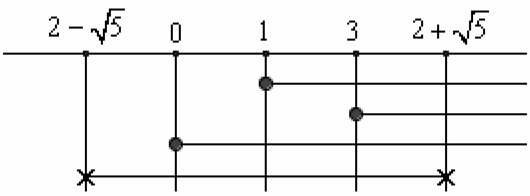
$x^2-4x+3<4$

$x^2-4x-1<0$

$2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$

In definitiva, tenendo conto delle condizioni poste precedentemente, avremo

$\boxed{3\leq x<2+\sqrt{5}}$



52)

$\boxed{\sqrt{x+3} > 2 - \sqrt{x-1}}$

Poniamo le condizioni di realtà dei radicali:

$$\boxed{\begin{array}{l} x+3 \geq 0,\ \ x \geq -3 \\ x-1 \geq 0,\ \ x \geq 1 \end{array}}$$

Trasportiamo un termine a primo membro
in modo che i due membri *siano* sicuramente positivi:

$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} > 2$

A questo punto eleviamo al quadrato:

$\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}\right)^2 > 4$

$x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)} > 4$

$2\sqrt{(x+3)(x-1)} > 2-2x$

Semplifichiamo per $2$:

$\sqrt{(x+3)(x-1)} > 1-x$

$$\begin{cases} (x+3)(x-1) \geq 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (x+3)(x-1) > (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 1 \\ \cancel{x^2} - x + 3x - 3 > 1 - 2x \cancel{+x^2},\ \ 4x > 4,\ \ x > 1 \end{cases}$$

$x > 1 \qquad \vee$ *sistema impossibile*

In definitiva, viste anche
le condizioni poste precedentemente, avremo

$\boxed{x > 1}$

53)

$\boxed{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}<\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}}$

Poniamo le condizioni di realtà dei radicali:

$$\boxed{\begin{array}{l} x+1\ge 0,\ \ x\ge -1 \\ x+2\ge 0,\ \ x\ge -2 \\ x+3\ge 0,\ \ x\ge -3 \\ x+4\ge 0,\ \ x\ge -4 \end{array}}$$

che, poste a sistema, danno $\boxed{x\ge -1}$.

Trasportiamo i termini in modo che i due membri siano sicuramente positivi:

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}<\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}$

A questo punto eleviamo al quadrato:

$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)^2<\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}\right)^2$

$\cancel{x}\cancel{+1}\cancel{+x}\cancel{+4}+2\sqrt{(x+1)(x+4)}<\cancel{x}\cancel{+3}\cancel{+x}\cancel{+2}+2\sqrt{(x+3)(x+2)}$

Semplifichiamo per 2:

$\sqrt{(x+1)(x+4)}<\sqrt{(x+3)(x+2)}$

*Scrivere le condizioni di positività dei radicandi*
*sarebbe SUPERFLUO,*
*perché avevamo già posto prima le condizioni di positività*
*di tutti i fattori che li compongono.*

Eleviamo al quadrato e otteniamo:

$(x+1)(x+4)<(x+3)(x+2)$

$\cancel{x^2}\cancel{+4x}\cancel{+x}+4<\cancel{x^2}\cancel{+2x}\cancel{+3x}+6$

cioè una disequazione sempre verificata, $\forall x\in\mathbb{R}$.

In definitiva, per le condizioni poste precedentemente, le soluzioni sono i valori

$\boxed{x\ge -1}$

74)

$$\boxed{\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{\sqrt{4x-3}-x}<0}$$

$N>0$

$$\sqrt{3x+1}-2x>0$$
$$\sqrt{3x+1}>2x$$
$$\begin{cases}3x+1\geq 0\\2x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}\cancel{3x+1\geq 0}\ \textit{sovrabbondante}\\2x\geq 0\\3x+1>4x^2\end{cases}$$
$$\begin{cases}x\geq -1/3\\x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}x\geq 0\\4x^2-3x-1<0\quad -1/4<x<1\end{cases}$$
$$\underbrace{-1/3\leq x<0\quad\vee\quad 0\leq x<1}_{-1/3\leq x<1}$$

La condizione di esistenza "C. E."
(s'intende: "di realtà, di esistenza in $\mathbb{R}$, di esistenza in campo reale") è:
$3x+1\geq 0,\ x\geq -1/3.$
*Dunque il Numeratore*:

- *esiste solo quando* $x\geq -1/3$ (*NON esiste per* $x<-1/3$), *ed è*
- *positivo per* $-1/3\leq x<1$
- *nullo per* $x=1$ (*invece, come abbiamo già visto e come si può controllare anche per sostituzione diretta, per* $x=-1/3$ *è* $>0$)
- *negativo per* $x>1$

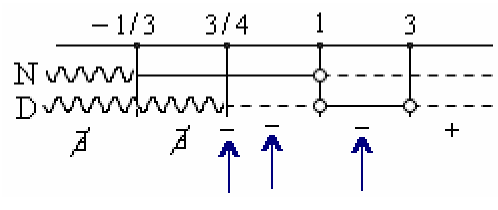
$D>0$

$$\sqrt{4x-3}-x>0$$
$$\sqrt{4x-3}>x$$
$$\begin{cases}4x-3\geq 0\\x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}\cancel{4x-3\geq 0}\ \textit{sovrabbondante}\\x\geq 0\\4x-3>x^2\end{cases}$$
$$\begin{cases}x\geq 3/4\\x<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}x\geq 0\\x^2-4x+3<0\quad 1<x<3\end{cases}$$
$$\textit{sist. imposs.}\qquad 1<x<3$$

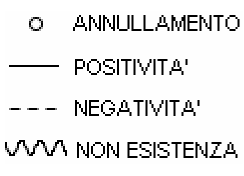
La condizione di esistenza (C. E.) è: $x\geq 3/4$
Dunque il Denominatore:

- *esiste solo quando* $x\geq 3/4$ (*NON esiste per* $x<3/4$), *ed è*
- *positivo per* $1<x<3$
- *nullo per* $x=1,\ x=3$ (*controllalo sostituendo*!)
- *negativo per* $3/4\leq x<1\ \vee\ x>3$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.




SIMBOLOGIA:




Osserviamo che per x=3/4 il Numeratore è >0 e il Denominatore è <0, quindi la frazione è <0 e la disequazione è verificata.

La disequazione è verificata per $\boxed{3/4\leq x<3\ \ ma\ x\neq 1}$.

75)

$$\boxed{\frac{\sqrt{4x+5}-x}{2\sqrt{x}-x+3}\geq 0}$$

$N>0$

$$\sqrt{4x+5}-x>0$$

$$\sqrt{4x+5}>x$$

$$\begin{cases}4x+5\geq 0\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{4x+5\geq 0}\ \textit{sovrabbondante}\\ x\geq 0\\ 4x+5>x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq -5/4\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}x\geq 0\\ x^2-4x-5<0 \quad -1<x<5\end{cases}$$

$$\underbrace{-5/4\leq x<0 \quad \vee \quad 0\leq x<5}_{-5/4\leq x<5}$$

La condizione di esistenza "C. E."
(s'intende: "di realtà, di esistenza in $\mathbb{R}$, di esistenza in campo reale") è:
$4x+5\geq 0,\ x\geq -5/4$
*Dunque il Numeratore*:

- *esiste solo quando* $x\geq -5/4$ (*NON esiste per* $x<-5/4$) *ed è*
- *positivo per* $-5/4\leq x<5$
- *nullo per* $x=5$ (*invece, come abbiamo già visto e come si può controllare anche per sostituzione diretta, per* $x=-5/4$ *è* $>0$)
- *negativo per* $x>5$

$D>0$

$$2\sqrt{x}-x+3>0$$

$$2\sqrt{x}>x-3$$

$$\begin{cases}x\geq 0\\ x-3<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{x\geq 0}\ \textit{sovrabbondante}\\ x-3\geq 0\\ 4x>x^2-6x+9\end{cases}$$

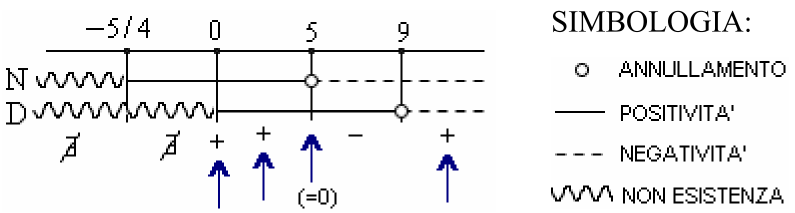
$$\begin{cases}x\geq 0\\ x<3\end{cases} \vee \begin{cases}x\geq 3\\ x^2-10x+9<0 \quad 1<x<9\end{cases}$$

$$\underbrace{0\leq x<3 \quad \vee \quad 3\leq x<9}_{0\leq x<9}$$

La condizione di esistenza è: $x\geq 0$
Dunque il Denominatore:

- *esiste solo quando* $x\geq 0$ (*NON esiste per* $x<0$) *ed è*
- *positivo per* $0\leq x<9$
- *nullo per* $x=9$ (*controllalo per sostituzione diretta! Invece, come abbiamo già visto e come, d'altronde, per sostituzione diretta puoi ricontrollare, per* $x=0$ *è* $>0$)
- *negativo per* $x>9$

Lo schema sottostante riassume lo studio fatto di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore:




Osserviamo che per x=0 Numeratore e Denominatore sono entrambi >0, quindi la frazione è >0 e la disequazione è verificata.

La disequazione è verificata per $\boxed{0\leq x\leq 5 \ \vee\ x>9}$.

76)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x-2}-x}{\sqrt{x+2}-x}>0}$$

$N>0$

$$\sqrt{x-2}-x>0$$
$$\sqrt{x-2}>x$$
$$\begin{cases}x-2\ge 0\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{x-2\ge 0}\ \textit{sovrabbondante}\\ x\ge 0\\ x-2>x^2\end{cases}$$
$$\begin{cases}x\ge 2\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x+2<0\ \ \textit{imposs.}\,(\Delta<0)\end{cases}$$

*I due sistemi sono entrambi impossibili:*
*il Numeratore non può mai essere* $>0$

La condizione di esistenza è $x\ge 2$.
Dunque il Numeratore:

- *esiste solo quando* $x\ge 2$ (*NON esiste per* $x<2$)
- *e laddove esiste, quindi per* $x\ge 2$, *è negativo*
  *(controlla tu stesso, sostituendo direttamente, la negatività anche per* $x=2$*)*

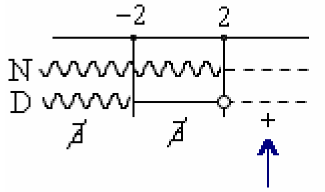
$D>0$

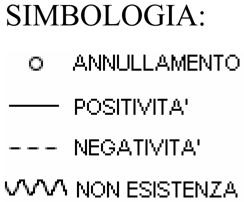
$$\sqrt{x+2}-x>0$$
$$\sqrt{x+2}>x$$
$$\begin{cases}x+2\ge 0\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{x+2\ge 0}\ \textit{sovrabbondante}\\ x\ge 0\\ x+2>x^2\end{cases}$$
$$\begin{cases}x\ge -2\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-2<0\quad -1<x<2\end{cases}$$
$$\underbrace{-2\le x<0 \ \vee\ 0\le x<2}_{-2\le x<2}$$

La condizione di esistenza è: $x\ge -2$
Dunque il Denominatore:

- *esiste solo quando* $x\ge -2$ (*NON esiste per* $x<-2$) *ed è*
- *positivo per* $-2\le x<2$
- *nullo per* $x=2$ (*invece, come puoi anche ricontrollare per sostituzione, con* $x=-2$ *è* $>0$)
- *negativo per* $x>2$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.




La disequazione è verificata per $\boxed{x>2}$.

77)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x^2-4}-x+3}{\sqrt{x^2+4}-x-5}<0}$$

$N>0$

$$\sqrt{x^2-4}-x+3>0$$

$$\sqrt{x^2-4}>x-3$$

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x-3<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2-4\geq 0} \; sovrabbondante \\ x-3\geq 0 \\ \cancel{x^2}-4>\cancel{x^2}-6x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq -2 \;\vee\; x\geq 2 \\ x<3 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 3 \\ 6x>13 \quad x>13/6 \end{cases}$$

$$\underbrace{x\leq -2 \vee 2\leq x<3 \quad \vee \quad x\geq 3}_{x\leq -2 \;\vee\; x\geq 2}$$

La condizione di esistenza è: $x\leq -2 \;\vee\; x\geq 2$

*Dunque il Numeratore:*

- *esiste solo quando* $x\leq -2 \;\vee\; x\geq 2$ (*NON esiste per* $-2<x<2$)
- *e, laddove esiste, è sempre* $>0$

$D>0$

$$\sqrt{x^2+4}-x-5>0$$

$$\sqrt{x^2+4}>x+5$$

$$\begin{cases} x^2+4\geq 0 \; sempre\ verificata \\ x+5<0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{x^2+4\geq 0} \; sovrabbondante \\ x+5\geq 0 \\ \cancel{x^2}+4>\cancel{x^2}+10x+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sempre\ verif. \\ x<-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq -5 \\ -10x>21; \quad x<-21/10 \end{cases}$$

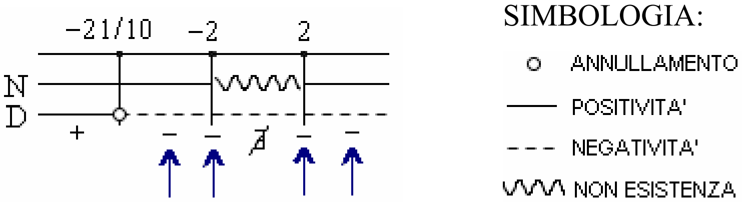
$$\underbrace{x<-5 \quad \vee \quad -5\leq x<-21/10}_{x<-21/10}$$

La condizione di esistenza è sempre verificata.

Dunque il Denominatore:

- *esiste per qualsiasi valore di x*
- *è positivo per* $x<-21/10$
- *è nullo per* $x=-21/10$
- *è negativo per* $x>-21/10$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.




Osserviamo che per $x=-2$ e per $x=2$ il Numeratore è >0 e il Denominatore è <0, quindi la frazione è <0 e la disequazione è verificata.

La disequazione è verificata per $\boxed{-\frac{21}{10}<x\leq -2 \;\vee\; x\geq 2}$.

78)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x^2+x-6}-x}{\sqrt{x+2}-3}>0}$$

$N>0$

$$\sqrt{x^2+x-6}-x>0$$
$$\sqrt{x^2+x-6}>x$$
$$\begin{cases} x^2+x-6\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \cancel{x^2+x-6\ge 0} \ \textit{sovrabbondante} \\ x\ge 0 \\ \cancel{x^2}+x-6>\cancel{x^2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\le -3 \ \vee \ x\ge 2 \\ x<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x\ge 0 \\ x>6 \end{cases}$$
$$x\le -3 \qquad \vee \qquad x>6$$

La condizione di esistenza C.E. è: $x\le -3 \ \vee \ x\ge 2$
Dunque il Numeratore:

- *esiste solo quando* $x\le -3 \ \vee \ x\ge 2$ $(\textit{NON esiste per } -3<x<2)$
- $\textit{è}>0 \ \textit{per} \ x\le -3 \vee x>6$
- $\textit{è}=0 \ \textit{per} \ x=6$
- $\textit{è}<0 \ \textit{per} \ 2\le x<6$

$D>0$

$$\sqrt{x+2}-3>0$$
$$\sqrt{x+2}>3$$

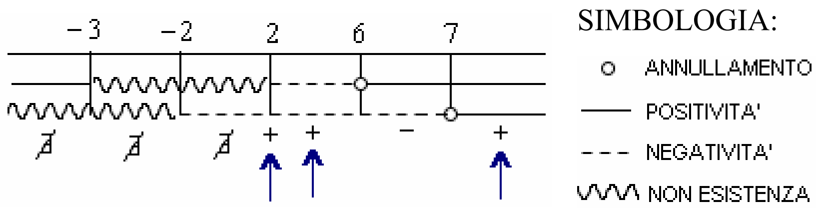
*Sappiamo che questo è un caso particolare nel quale*
*non occorre porre alcuna condizione!*
*Tuttavia, nello schema finale,*
*sarà indispensabile tener conto della "C.E.",*
*condizione di esistenza ovvero di realtà* $(x\ge -2)$

$$x+2>9$$
$$x>7$$

La condizione di esistenza è $x\ge -2$,
e dunque il Denominatore:

- $\textit{esiste per} \ x\ge -2$ $(\textit{non esiste per } x<-2)$
- $\textit{è}>0 \ \textit{per} \ x>7$
- $\textit{è}=0 \ \textit{per} \ x=7$
- $\textit{è}<0 \ \textit{per} \ -2\le x<7$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.




Osserviamo che per x = 2
Numeratore e Denominatore
sono entrambi <0,
quindi la frazione è >0
e la disequazione
è verificata

La disequazione è verificata per $\boxed{2\le x<6 \ \vee \ x>7}$.

79)

$$\boxed{\frac{x-\sqrt{x+12}}{\sqrt{x+12}-5}\le 0}$$

$N>0$

$x-\sqrt{x+12}>0$

$x>\sqrt{x+12}$

$\sqrt{x+12}<x$

$$\begin{cases} x+12\ge 0;\ \ x\ge -12 \\ x>0 \\ x+12<x^2;\ \ x^2-x-12>0;\ \ (x+3)(x-4)>0;\ \ x<-3 \vee x>4 \end{cases}$$

Soluzioni del sistema : $x>4$

La condizione di esistenza è: $x\ge -12$

Dunque il Numeratore:

□ *esiste solo quando* $x\ge -12$ (*NON esiste per* $x<-12$)

□ *è* $>0$ *per* $x>4$

□ *è* $=0$ *per* $x=4$

□ *è* $<0$ *per* $-12\le x<4$

$D>0$

$\sqrt{x+12}-5>0$

$\sqrt{x+12}>5$

Sappiamo che questo è un caso particolare nel quale
non occorre porre alcuna condizione!
Tuttavia, nello schema finale,
sarà indispensabile tener conto della condizione di realtà $x\ge -12$

$x+12>25$

$x>13$

Dunque il Denominatore:

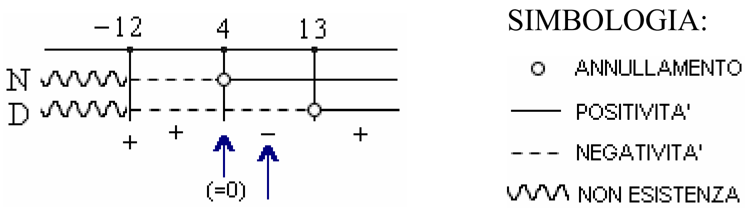
□ *esiste per* $x\ge -12$ (*non esiste per* $x<-12$)

□ *è* $>0$ *per* $x>13$

□ *è* $=0$ *per* $x=13$

□ *è* $<0$ *per* $-12\le x<13$

Lo schema sottostante riassume lo studio di esistenza e segno di Numeratore e Denominatore, sopra effettuato.




La disequazione è verificata per $\boxed{4\le x<13}$ .

80)

$$\boxed{\frac{2-\sqrt{3-x}}{x^2+x-6} \geq 0}$$

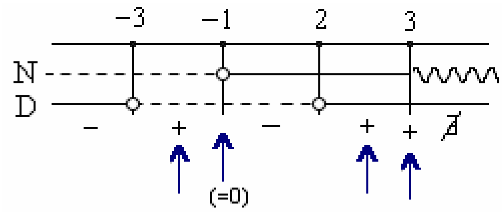
$N > 0 \quad 2-\sqrt{3-x} > 0 \quad -\sqrt{3-x} > -2$

$\sqrt{3-x} < 2$ che sappiamo essere equivalente
alla condizione ottenibile mediante elevamento al quadrato,
posta a sistema con la condizione di esistenza.

$$\begin{cases} 3-x \geq 0; \quad x \leq 3 \quad C.E.\ condizione\ di\ esistenza \\ 3-x < 4; \quad -x < 1; \quad x > -1 \end{cases}$$

*Dunque il numeratore*: $\grave{e} > 0$ *per* $-1 < x \leq 3$,
*ed esiste solo quando* $x \leq 3$ (*NON esiste per* $x > 3$)

$D > 0 \quad x^2+x-6 > 0, \ (x+3)(x-2) > 0, \ x < -3 \vee x > 2$




$$\boxed{-3 < x \leq -1 \ \vee \ 2 < x \leq 3}$$

SIMBOLOGIA:

o ANNULLAMENTO
—— POSITIVITA'
- - - NEGATIVITA'
∿∿∿ NON ESISTENZA

Osserviamo che per x=3
Numeratore e Denominatore
sono entrambi >0,
quindi la frazione è >0
e la disequazione
è verificata

81)

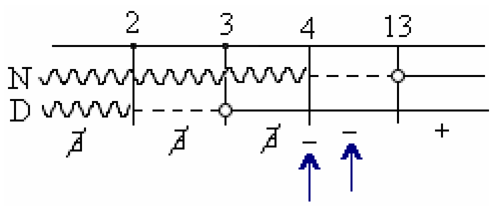
$$\boxed{\frac{\sqrt{x-4}-3}{\sqrt{x-2}-1} < 0}$$

$N > 0 \quad \sqrt{x-4}-3 > 0$

$\sqrt{x-4} > 3$
Sappiamo che in questo caso particolare
la condizione di realtà del radicale è,
in relazione a questa disequazione N>0, superflua;
tuttavia, dovremo tenerne poi conto per compilare
lo schema finale relativo alla disequazione N/D<0.
Dunque,
*la* condizione di realtà di N ("*condizione di esistenza*", *C.E.*) è: $x-4 \geq 0, \ x \geq 4$
$N > 0 \quad x-4 > 9, \ x > 13$

$D > 0 \quad \sqrt{x-2}-1 > 0$

$\sqrt{x-2} > 1$
Sappiamo che in questo caso particolare
la condizione di realtà del radicale è,
in relazione a questa disequazione D>0, superflua;
tuttavia, dovremo tenerne poi conto per compilare
*lo schema finale relativo alla disequazione* $N/D < 0$.
*Dunque*,
*la condizione di realtà di D* ("*condizione di esistenza*", *C.E.*) *è*: $x-2 \geq 0, \ x \geq 2$
$D > 0 \quad x-2 > 1, \ x > 3$




$$\boxed{4 \leq x < 13}$$

SIMBOLOGIA:

o ANNULLAMENTO
—— POSITIVITA'
- - - NEGATIVITA'
∿∿∿ NON ESISTENZA

Osserviamo che per x = 4
il Numeratore è <0
e il Denominatore è >0,
quindi la frazione è <0
e la disequazione
è verificata.

82)

$$\boxed{\frac{2x^2-7x+6}{\sqrt{x-1}}>0}$$

$N>0 \;\; 2x^2-7x+6>0$ $\quad$ *Soluzioni dell'equazione associata*: $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\frac{7\pm1}{4}=\left\langle\begin{matrix}3/2\\2\end{matrix}\right.$

$x<3/2 \;\vee\; x>2$

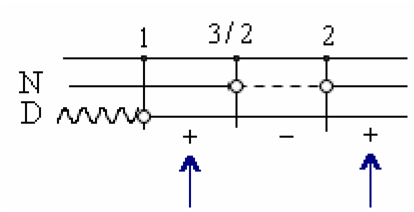
$D>0 \;\; \sqrt{x-1}>0 \;\; x>1.$

Il denominatore, essendo una radice quadrata, non può essere negativo;

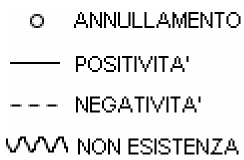
*esiste solo per* $x\geq1$,

*per* $x=1$ *si annulla*,

*per* $x>1$ *è* $>0$.




SIMBOLOGIA:




$$\boxed{1<x<\frac{3}{2} \;\vee\; x>2}$$

RISOLUZIONE PIU' VELOCE

Avremmo potuto risolvere anche **molto più rapidamente**.

Il denominatore, essendo una radice quadrata, laddove esiste in campo reale, è positivo,
e non influisce, dunque, sul segno della frazione:
può essere pertanto eliminato,
se si tiene conto che le soluzioni della disequazione data dovranno comunque essere >1
(la condizione $x>1$ mette assieme la condizione di realtà del radicale
e la condizione di non annullamento del denominatore).

Scriviamo dunque la condizione $\underline{x>1}$, mandiamo via il denominatore

$$\frac{2x^2-7x+6}{\cancel{\sqrt{x-1}}}>0$$

e risolviamo:

troveremo $x<3/2 \;\vee\; x>2$,

ma tenendo conto a questo punto della condizione posta,

concluderemo che le soluzioni della disequazione data sono i valori

$$\boxed{1<x<\frac{3}{2} \;\vee\; x>2}.$$

83)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x-2}}{x-4} \leq 0}$$

A volte capita di incontrare disequazioni irrazionali molto semplici
che si possono risolvere rapidissimamente,
col solo ragionamento, senza schemi.

Vediamo ad esempio quella proposta.

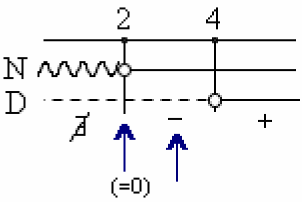
Il radicale a numeratore, laddove esiste in campo reale, è positivo (non-negativo);
ma esso esiste per $x \geq 2$ si annulla per x=2.
Pertanto la disequazione, che porta il verso $\leq$,
sarà verificata da quei valori di x che rendono

- il denominatore <0,
- oppure il numeratore =0,
- compatibilmente sempre però con la realtà del radicale.

Di conseguenza siamo subito in grado, anche senza schemi particolari,
di affermare che le soluzioni sono

$\boxed{2 \leq x < 4}$.

Tuttavia, se si preferisce, o anche per confermare il ragionamento precedente,
ecco lo schema che riassume esistenza e segno di Numeratore e Denominatore:

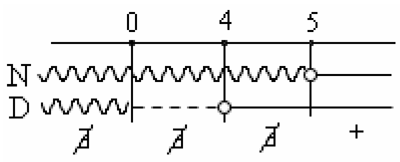



84)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x}-2} < 0}$$

Lo schema che riassume
lo studio di esistenza e segno
di Numeratore e Denominatore,
è riportato qui a fianco.
La disequazione è

$\boxed{IMPOSSIBILE}$.

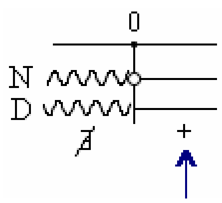



85)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0}$$

Lo schema che riassume
lo studio di esistenza e segno
di Numeratore e Denominatore,
è riportato qui a fianco.
La disequazione è verificata per

$\boxed{x > 0}$

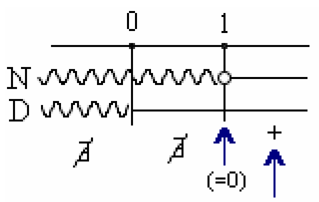



86)

$$\boxed{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1} \geq 0}$$

Lo schema che riassume
lo studio di esistenza e segno
di Numeratore e Denominatore,
è riportato qui a fianco.
La disequazione è verificata per

$\boxed{x \geq 1}$



87)

$$\boxed{\frac{\sqrt{1-8x}}{\sqrt{1+2x-8x^2}-4x}>0}$$

Il numeratore, essendo una radice quadrata, non può essere negativo;
mandiamolo via dunque,
scrivendo però la sua condizione
di esistenza+non annullamento $x<1/8$.
*I*nfatti, i valori di x che rendono il numeratore non esistente o nullo
non possono essere soluzione della disequazione data,
mentre fra gli altri valori (quelli, appunto, $<1/8$)
saranno soluzioni quelli che rendono il $denominatore > 0$.
*Dunque*:

$$\sqrt{1+2x-8x^2}-4x>0$$

$$\sqrt{1+2x-8x^2}>4x$$

$$\begin{cases}1+2x-8x^2\ge 0\\ 4x<0\end{cases} \vee \begin{cases}\cancel{1+2x-8x^2\ge 0} \text{ sovrabbondante}\\ 4x\ge 0\\ 1+2x-8x^2>16x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x^2-2x-1\le 0 \quad -\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ x<0\end{cases} \vee \begin{cases}x\ge 0\\ 24x^2-2x-1<0 \quad -\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}\le x<0 \qquad \vee \qquad 0\le x<\frac{1}{4}$$

La disequazione D>0 ha perciò le soluzioni $-\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{4}$,

e fra questi valori, quelli che sono simultaneamente $<\frac{1}{8}$ sono:

$\boxed{-\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{8}}$.

88)

$$\boxed{\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x^2-12}}{121-x^2}\ge 0}$$

$N>0$

$$2\sqrt{x}-\sqrt{x^2-12}>0$$

$$2\sqrt{x}>\sqrt{x^2-12}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-12\ge 0;\ \ x\le -2\sqrt{3}\ \vee\ x\ge 2\sqrt{3} \\ 4x>x^2-12;\ \ x^2-4x-12<0;\ \ (x+2)(x-6)<0;\ \ -2<x<6 \end{cases}$$

*Il sistema è verificato per*

$2\sqrt{3}\le x<6,$

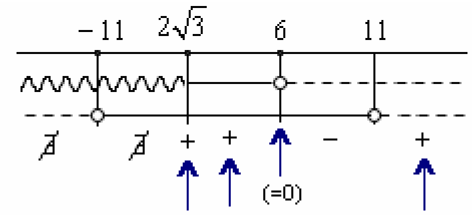
*e queste sono dunque anche le soluzioni della disequazione* $N>0$.
*Bisognerà, per lo schema finale, tenere conto anche*
*della condizione di esistenza* $(C.\,E.)$ *del numeratore* $N$:
*questa è data dal sistema*

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-12\ge 0;\ \ x\le -2\sqrt{3}\ \vee\ x\ge 2\sqrt{3} \end{cases}$$

*ossia è*: $x\ge 2\sqrt{3}$

$D>0$

$$121-x^2>0;\ \ x^2-121<0;\ \ -11<x<11$$




Soluzioni: $\boxed{2\sqrt{3}\le x\le 6\ \vee\ x>11}$

89)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x-7}{x+5}} > -3}$$

Il risultato di un'estrazione di radice quadrata, *qualora esista in campo reale*,
è $\geq 0$ e pertanto *senz'altro* maggiore di un numero negativo.
Quindi, affinché questa disequazione sia verificata,
occorre e basta che il radicale sia estraibile con risultato in $\mathbb{R}$,
ossia *occorre e basta che il radicando sia non-negativo*.
La disequazione data è perciò equivalente alla disequazione

$$\frac{x-7}{x+5} \geq 0$$

risolubile con uno scheminο oppure col metodo rapido,
e avente per soluzioni i valori

$$\boxed{x < -5 \vee x \geq 7}$$

90)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x-7}{x+5}} > 3}$$

Sappiamo che in questo caso

$$\sqrt{A(x)} > p, \ \ p \in \mathbb{R}, \ \ p > 0$$

porre la condizione di realtà del radicale è superfluo.
Perciò possiamo elevare al quadrato senza alcun'altra condizione e ottenere

$$\frac{x-7}{x+5} > 9; \quad \frac{x-7}{x+5} - 9 > 0; \quad \frac{x-7-9x-45}{x+5} > 0; \quad \frac{-8x-52}{x+5} > 0$$

$$\frac{8x+52}{x+5} < 0$$ (*cambiando i segni al numeratore, cambia il segno della frazione quindi dobbiamo cambiare anche il verso della disequazione*)

$$\frac{2x+13}{x+5} < 0$$ (*abbiamo semplificato per* 4)

$$\boxed{-\frac{13}{2} < x < -5}$$

91)

$$\boxed{\sqrt{\frac{x-7}{x+5}} < 3}$$

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{x+5} \geq 0 \\ \dfrac{x-7}{x+5} < 9 \end{cases}$$

La prima disequazione del sistema è verificata per $x < -5 \vee x \geq 7$,

la seconda per $x < -\frac{13}{2} \vee x > -5$;

il sistema (come anche, dunque, la disequazione di partenza) è perciò verificato per

$$\boxed{x < -\frac{13}{2} \vee x \geq 7}$$

94)

$\boxed{\sqrt[3]{13x-12x^2} > 2x-1}$

Possiamo elevare al cubo
senza porre alcuna condizione,
perché indice del radicale
ed esponente al quale eleviamo sono DISPARI.

$13x\cancel{-12x^2} > 8x^3\cancel{-12x^2} + 6x - 1$

$\boxed{8x^3 - 7x - 1 < 0}$

*Scomposizione col metodo di Ruffini* :

$P(1) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 8 & 0 & -7 & -1 \\ 1 & & 8 & 8 & 1 \\ \hline & 8 & 8 & 1 & 0 \end{array}$$

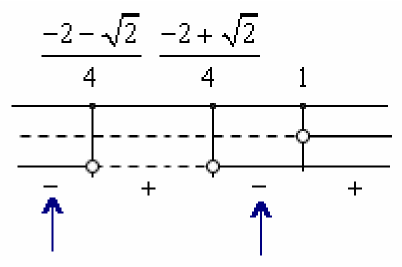
$\boxed{(x-1)\left(8x^2+8x+1\right) < 0}$

Studio del segno dei fattori in gioco:

$x-1>0 \quad x>1$

$8x^2+8x+1>0 \quad$ *Soluzioni dell'eq. associata* : $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{8} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{8} = \frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{8} = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$

$x < \frac{-2-\sqrt{2}}{4} \vee x > \frac{-2+\sqrt{2}}{4}$




$\boxed{x < \frac{-2-\sqrt{2}}{4} \vee \frac{-2+\sqrt{2}}{4} < x < 1}$