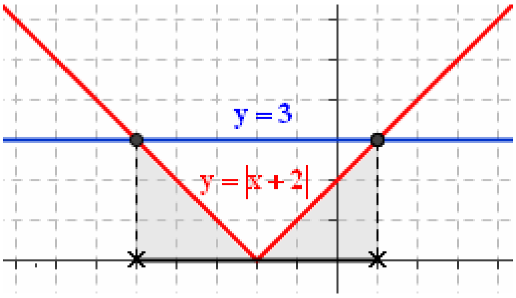
DISEQUAZIONI COL VALORE ASSOLUTO: CORREZIONI

1)
$\boxed{|x+2|<3}$
I numeri il cui valore assoluto è minore di 3
sono quelli compresi fra -3 e 3!
$-3<x+2<3$
... e sottraendo 2 da tutti gli anelli della catena, si ottiene
$-3-2<x\cancel{+2}\,\cancel{-2}<3-2$
$\boxed{-5<x<1}$

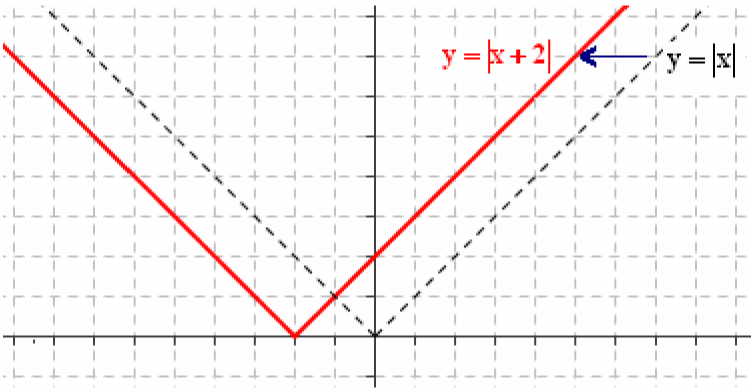
Risoluzione grafica:



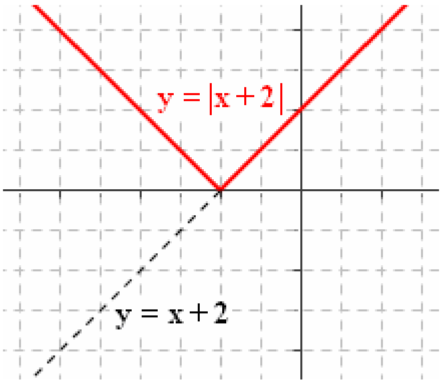
Il grafico della funzione $y=|x+2|$ si può tracciare

a) **normalmente, "per punti"**, assegnando dei valori a *x* e poi calcolando i corrispondenti valori di *y*;

b) o **pensando di ricavarlo dal grafico ben noto della funzione $y=|x|$**
per sostituzione di x con $x+2$
quindi **traslando il grafico ORIZZONTALMENTE di 2 unità verso SINISTRA**
(effetto "*bastian contrario*"; da x a $x+2$, spostamento a ***sinistra***):



c) oppure ancora, **pensando di ricavarlo dal grafico della funzione $y=x+2$**
tramite la manipolazione "passaggio al valore assoluto", che comporta di cancellare
la parte con ordinate negative per sostituirla con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse:



Nella figura, la funzione
$y=x+2$
è la retta inclinata di 45° in salita.
La parte della retta con ordinate negative,
quella tratteggiata in figura,
è stata sostituita dalla sua simmetrica rispetto
all'asse delle ascisse.
Ed ecco, in tratto continuo,
il grafico della funzione
$y=|x+2|$.

2)

$\boxed{|7-2x| \le 5}$

E' comodo riscrivere la disequazione sotto la forma equivalente

$|2x-7| \le 5$

dopodiché:

$-5 \le 2x-7 \le 5$

Addizioniamo 7:

$2 \le 2x \le 12$

Dividiamo per 2:

$\boxed{1 \le x \le 6}$

IN ALTERNATIVA

Lasciando la disequazione sotto la forma

$\boxed{|7-2x| \le 5}$

avremmo ottenuto:

$-5 \le 7-2x \le 5$

Sottraiamo 7:

$-12 \le -2x \le -2$

Cambiamo i segni, ma anche i versi!

$12 \ge 2x \ge 2$

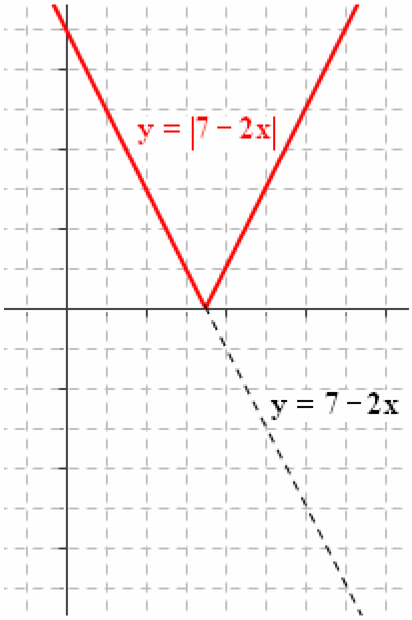
Dividiamo per 2:

$6 \ge x \ge 1$

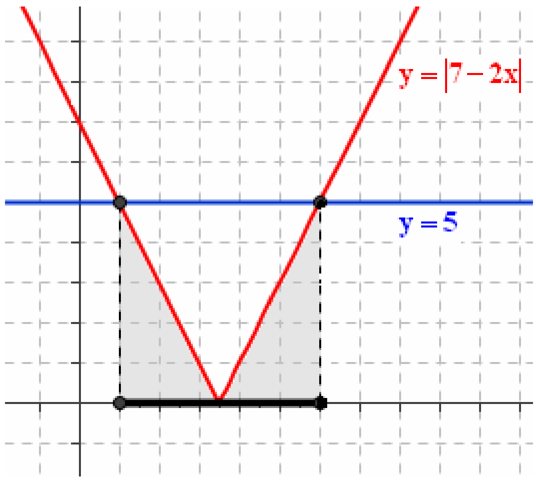
Trascriviamo al rovescio, da destra a sinistra :

$\boxed{1 \le x \le 6}$

Per una risoluzione grafica della $\boxed{|7-2x| \le 5}$,
è conveniente
pensare di ricavare il grafico della funzione $y=|7-2x|$
da quello della funzione $y=7-2x$
tramite la manipolazione "passaggio al valore assoluto",
che comporta di cancellare
la parte con ordinate negative per sostituirla
con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse:



… ed ecco,
rappresentando anche
la funzione costante a 2° membro $y=5$,
la risoluzione grafica
della disequazione
$|7-2x| \le 5$:
le soluzioni sono quei valori di x
per i quali la y corrispondente,
relativa al 1° membro,
è <, oppure è =,
alla y corrispondente,
relativa al 2° membro.



3)

$$\boxed{\left|x^2+3x\right|>4}$$

I numeri il cui valore assoluto è >4
sono quelli <-4, oppure >4!

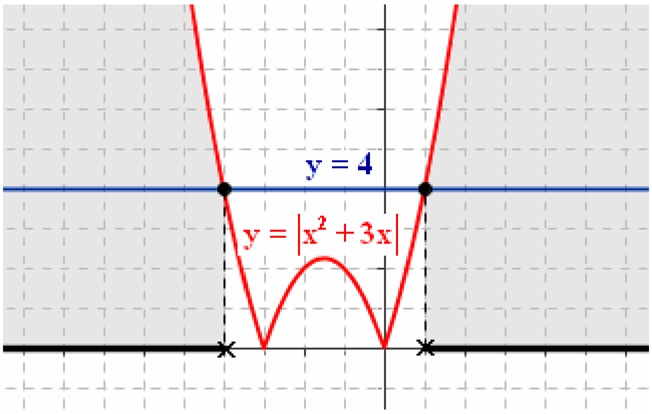
$$x^2+3x<-4 \quad \vee \quad x^2+3x>4$$

$$\underbrace{x^2+3x+4<0}_{\substack{\text{impossibile}\\(\Delta<0)}} \quad \vee \quad \underbrace{x^2+3x-4>0}_{x<-4\ \vee\ x>1}$$

Le soluzioni di questa disequazione
sono perciò i valori

$$\boxed{x<-4 \vee x>1}$$

Risoluzione grafica:



Il grafico della funzione
$y=\left|x^2+3x\right|$
è stato ricavato
a partire dal grafico della parabola
$y=x^2+3x$
cancellando la parte
con ordinate negative
per sostituirla con la sua simmetrica
rispetto all'asse delle ascisse.
Come si vede, i valori di x per i quali
l'ordinata su questo grafico è >4
sono quelli <–4, oppure >1.

4)

$$\boxed{\left|x^2-x-3\right|>3}$$

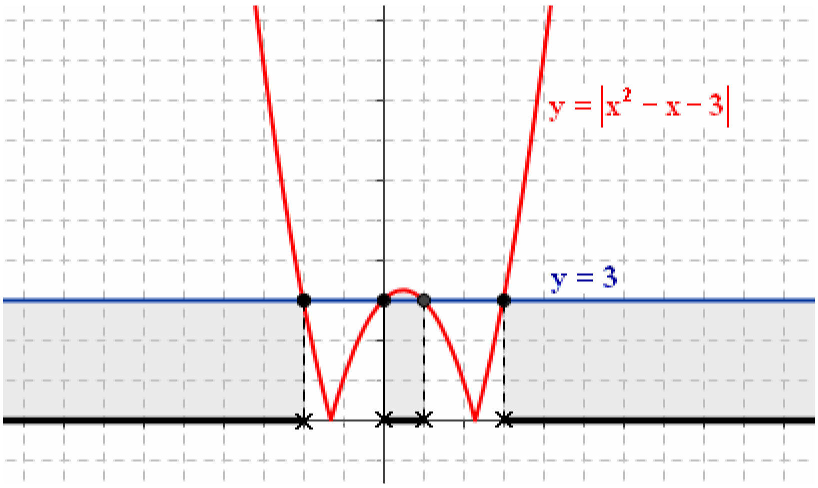
$$x^2-x\cancel{-3}<\cancel{-3} \quad \vee \quad x^2-x-3>3$$

$$x^2-x<0 \quad \vee \quad x^2-x-6>0$$

$$x(x-1)<0 \quad \vee \quad (x+2)(x-3)>0$$

$$\boxed{0<x<1} \quad \vee \quad \boxed{x<-2} \vee \boxed{x>3}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni di questa disequazione
è $\boxed{S=(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)}$



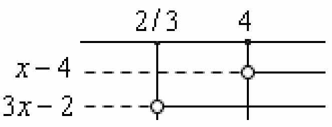
10)

$|x-4|<|3x-2|$

Studio dei segni delle espressioni entro stanghette:

$x-4>0 \quad x>4$

$3x-2>0 \quad x>2/3$



Distinzione di casi:

$x \le \frac{2}{3}: \quad -x+4<-3x+2; \quad 2x<-2; \quad x<-1$

quindi $\boxed{x<-1}$ $\left(\text{è come risolvere il sistema } \begin{cases} x \le \frac{2}{3} \\ x<-1 \end{cases} \right)$

$\frac{2}{3} \le x \le 4: \quad -x+4<3x-2; \quad -4x<-6; \quad x>3/2$

quindi $\boxed{\frac{3}{2}<x \le 4}$ $\left(\text{è come risolvere il sistema } \begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le 4 \\ x>3/2 \end{cases} \right)$

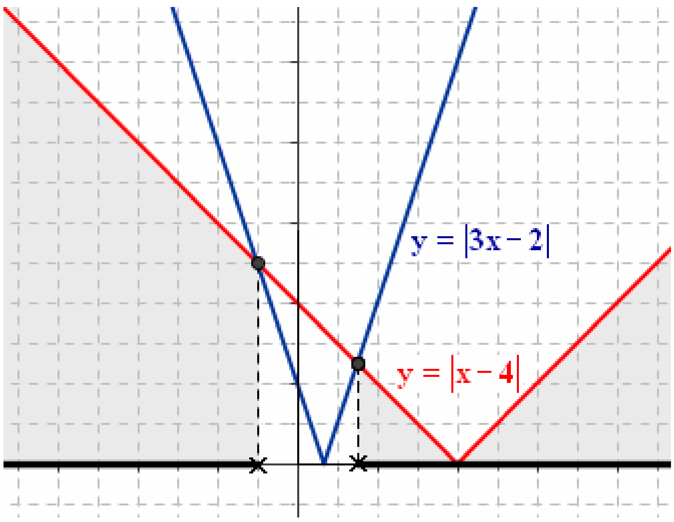
$x \ge 4: \quad x-4<3x-2; \quad -2x<2; \quad x>-1$

quindi $\boxed{x \ge 4}$ $\left(\text{è come risolvere il sistema } \begin{cases} x \ge 4 \\ x>-1 \end{cases} \right)$

Facendo l'unione insiemistica degli intervalli trovati, ecco le soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<-1} \vee \boxed{x>\frac{3}{2}}$

Risoluzione grafica:



Il grafico della funzione $y=|3x-2|$ *si può tracciare disegnando il grafico della retta* $y=3x-2$, *poi cancellandone la parte con ordinate negative per sostituirla con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse.*

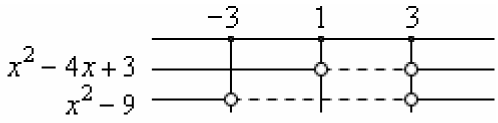
Il grafico della funzione $y=|x-4|$ *si può ottenere dal grafico della "funzione madre"* $y=|x|$, *traslandolo a destra di 4 unità.*

11)

$$\left|x^2-4x+3\right|>\left|x^2-9\right|$$

$x^2-4x+3>0 \quad (x-1)(x-3)>0 \quad x<1 \vee x>3$

$x^2-9>0 \quad x<-3 \vee x>3$



$x\le -3 \vee x\ge 3: \quad \cancel{x^2}-4x+3>\cancel{x^2}-9; \quad -4x>-12; \quad x<3$

quindi $\boxed{x\le -3}$ $\left(\text{è come risolvere il sistema } \begin{cases} x\le -3 \vee x\ge 3 \\ x<3 \end{cases}\right)$

$-3\le x\le 1: \quad x^2-4x+3>-x^2+9; \quad 2x^2-4x-6>0; \quad x^2-2x-3>0; \quad x<-1 \vee x>3$

quindi $\boxed{-3\le x<-1}$ $\left(\text{è come risolvere il sistema } \begin{cases} -3\le x\le 1 \\ x<-1 \vee x>3 \end{cases}\right)$

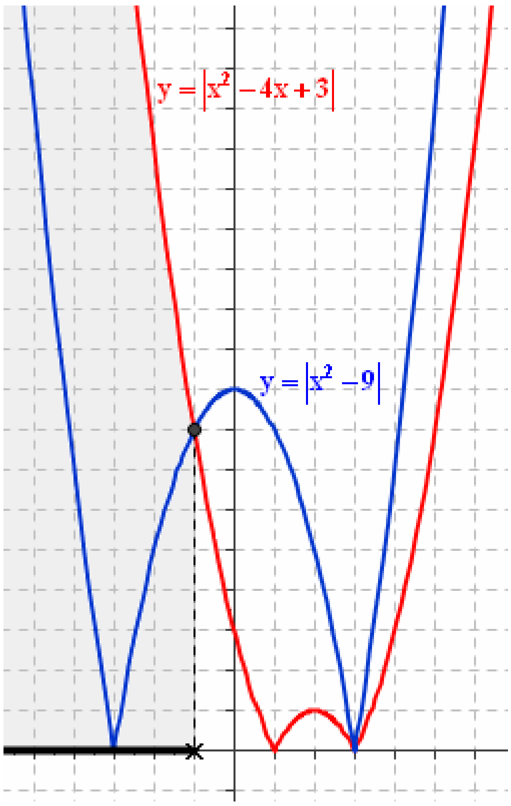
$1\le x\le 3: \quad \cancel{-x^2}+4x-3>\cancel{-x^2}+9; \quad 4x>12; \quad x>3$

quindi $\boxed{\text{nessuna soluz. in questo intervallo}}$ $\left(\text{è come risolvere il sistema } \begin{cases} 1\le x\le 3 \\ x>3 \end{cases}\right)$

Facendo l'unione insiemistica degli intervalli trovati, ecco le soluzioni della disequazione:

$\boxed{x<-1}$

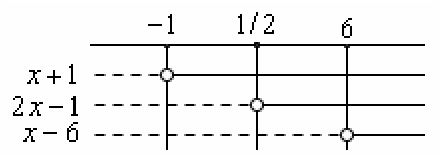
Risoluzione grafica:



12)

$$\boxed{|x+1|+|2x-1|<|x-6|}$$

$x+1>0 \quad x>-1$
$2x-1>0 \quad x>1/2$
$x-6>0 \quad x>6$



$\begin{cases} x \le -1 \\ \cancel{-x}\cancel{-1}-2x\cancel{+1}<\cancel{-x}+6; \; x>-3 \end{cases}$ $\boxed{-3<x\le -1}$

$\begin{cases} -1 \le x \le 1/2 \\ \cancel{x}+1\cancel{-2x}+1<\cancel{-x}+6; \; 2<6 \text{ sempre verificata} \end{cases}$ $\boxed{-1\le x \le 1/2}$

$\begin{cases} 1/2 \le x \le 6 \\ x\cancel{+1}+2x\cancel{-1}<-x+6; \; 4x<6 \;\; x<3/2 \end{cases}$ $\boxed{1/2\le x<3/2}$

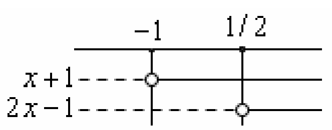
$\begin{cases} x \ge 6 \\ \cancel{x}\cancel{+1}+2x\cancel{-1}<\cancel{x}-6; \; x<-3 \end{cases}$ $\boxed{\text{sistema impossibile}}$

Facendo l'unione insiemistica degli intervalli ottenuti si ottengono le soluzioni:

$$\boxed{-3<x<\frac{3}{2}}$$

Risoluzione grafica

Grafico della funzione a **1° membro**
$y=|x+1|+|2x-1|$.
Il quadro sinottico, limitandoci alle espressioni che compaiono a 1° membro, è



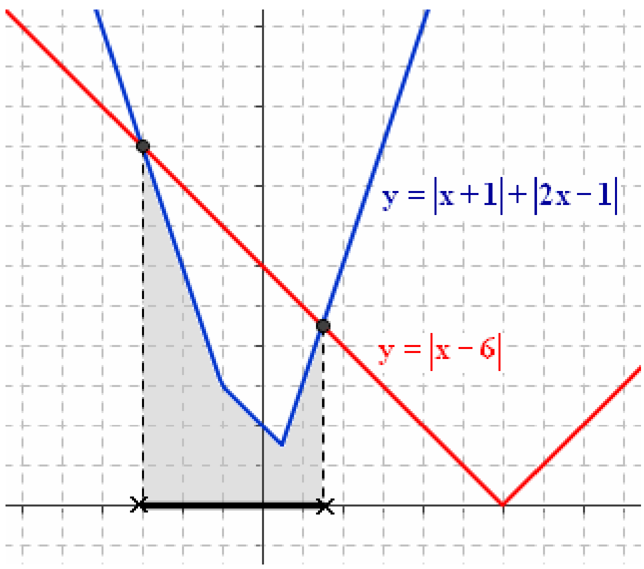
e ne traiamo che la funzione considerata diventa:

Per $\boxed{x\le -1}$: $\boxed{y=}-x\cancel{-1}-2x\cancel{+1}=\boxed{-3x}$
Per $\boxed{-1\le x\le 1/2}$: $\boxed{y=}x+1-2x+1=\boxed{-x+2}$
Per $\boxed{x\ge 1/2}$: $\boxed{y=}x\cancel{+1}+2x\cancel{-1}=\boxed{3x}$

quindi il suo grafico è costituito da una semiretta, un segmento e un'altra semiretta che "si tengono per mano".

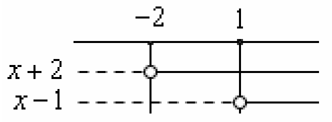
Il grafico del **2° membro**
$y=|x-6|$
si può ottenere immediatamente traslando di 6 unità verso destra il grafico della funzione $y=|x|$.

La risoluzione grafica riportata qui a destra, e conferma i risultati di quella algebrica.



16)

$\boxed{\dfrac{|x+2|+x}{|x-1|-3}<0}$ $\quad x+2>0 \quad x>-2$ $\quad x-1>0 \quad x>1$



$$\begin{cases} x \le -2 \\ \dfrac{\cancel{-x}-2\cancel{+x}}{-x+1-3}<0 \end{cases} \quad \frac{-2}{-x-2}<0 \ \text{ NOTA 1 } \ \frac{2}{x+2}<0 \ \text{ NOTA 2 } \ x<-2$$

SOLUZIONI
1° SISTEMA:
$\boxed{x<-2}$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ \dfrac{x+2+x}{-x+1-3}<0 \end{cases} \quad \frac{2x+2}{-x-2}<0 \ \text{ NOTA 3 } \ \frac{2x+2}{x+2}>0 \ \text{ NOTA 4 } \ x<-2 \vee x>-1$$

SOLUZIONI
2° *SISTEMA*:
$\boxed{-1<x\le 1}$

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ \dfrac{x+2+x}{x-1-3}<0 \end{cases} \quad \frac{2x+2}{x-4}<0 \ \text{ NOTA 5 } \ -1<x<4$$

SOLUZIONI
3° SISTEMA:
$\boxed{1\le x<4}$

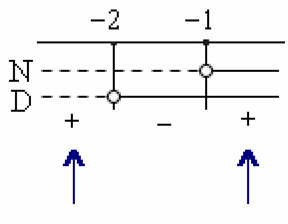
Le **soluzioni della nostra disequazione** sono dunque: $\boxed{x<-2} \vee \boxed{-1<x<4}$

NOTA 1
Una frazione *non muta* il suo valore
se cambiamo *sia* il segno del numeratore *che* quello del denominatore.
Perciò la disequazione $\frac{-2}{-x-2}<0$ è equivalente alla disequazione $\frac{2}{x+2}<0$.

NOTA 2
Per risolvere la $\frac{2}{x+2}<0$ non è necessario fare schemi particolari, basta un banale ragionamento!
Una frazione, il cui numeratore è positivo, risulta <0 in quei casi in cui è <0 il denominatore.

NOTA 3
Qui abbiamo cambiato i segni a denominatore *soltanto*; ma in questo modo,
cambia di segno la frazione, quindi *occorre cambiare il verso* della disequazione.

NOTA 4
La disequazione $\frac{2x+2}{x+2}>0$ è equivalente alla $\frac{\cancel{2}x+\cancel{2}^{1}}{x+2}>0$.



Per risolvere, poi, la $\frac{x+1}{x+2}>0$ si utilizzerà lo schema riportato qui a fianco
oppure, più rapidamente, si potrà ragionare così:
il QUOZIENTE $\frac{x+1}{x+2}$ è >0 esattamente in quegli stessi casi nei quali
il PRODOTTO $(x+1)(x+2)$ è >0.
Ma la disequazione $(x+1)(x+2)>0$
ha un'equazione associata che ammette come soluzioni –2 e –1,
ed è verificata per i "VALORI ESTERNI" $x<-2 \vee x>-1$.

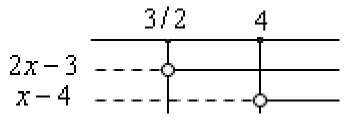
NOTA 5
Esattamente come per la NOTA 4, la disequazione $\frac{2x+2}{x-4}<0$, che è equivalente alla $\frac{x+1}{x-4}<0$,
può essere risolta col solito schemino per le diseq. fratte, oppure con un ragionamento più rapido:
chiedersi quando risulta $\frac{x+1}{x-4}<0$ equivale a chiedersi quando risulta $(x+1)(x-4)<0$:
disequazione, questa, di 2° grado, che è verificata per VALORI INTERNI
all'intervallo che ha come estremi le soluzioni dell'equazione associata,
le quali si "leggono" dalla scomposizione in fattori e sono quindi –1 e 4: $-1<x<4$.

17)

$$\boxed{\frac{x^2-|2x-3|}{x|x-4|}\geq 0}$$

$2x-3>0 \quad x>3/2$

$x-4>0 \quad x>4$



1° sistema

$$\begin{cases} x\leq 3/2 \\ \dfrac{x^2-(-2x+3)}{x(-x+4)}\geq 0 \quad \dfrac{x^2+2x-3}{x(-x+4)}\geq 0 \quad \dfrac{(x+3)(x-1)}{x(-x+4)}\geq 0 \quad \underset{NOTA}{\dfrac{(x+3)(x-1)}{x(x-4)}\leq 0} \end{cases}$$

NOTA
Cambiando il segno di uno dei fattori a denominatore, cambia il segno del denominatore e quindi di tutta la frazione: bisogna cambiare anche il verso della disequazione

Disequazione fratta:

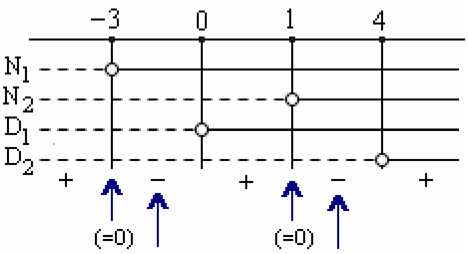
$$\frac{\overset{N_1}{(x+3)}\overset{N_2}{(x-1)}}{\underset{D_1}{x}\underset{D_2}{(x-4)}}\leq 0$$

$N_1>0 \quad x+3>0;\ x>-3$

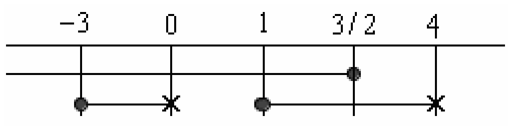
$N_2>0 \quad x-1>0;\ x>1$

$D_1>0 \quad x>0$

$D_2>0 \quad x-4>0;\ x>4$



SCHEMA PER
LA DISEQUAZIONE FRATTA
Sue soluzioni:
$-3\leq x<0 \ \vee\ 1\leq x<4$



SCHEMA PER IL SISTEMA

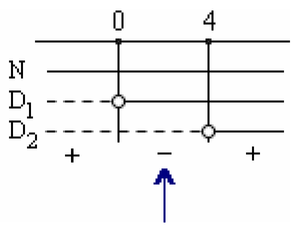
Sue soluzioni:

$$\boxed{-3\leq x<0 \ \vee\ 1\leq x\leq 3/2}$$

SOLUZIONI 1° SISTEMA

2° sistema

$$\begin{cases} 3/2\leq x\leq 4 \\ \dfrac{x^2-(2x-3)}{x(-x+4)}\geq 0 \quad \dfrac{x^2-2x+3}{x(-x+4)}\geq 0 \quad \dfrac{\overset{N}{x^2-2x+3}}{\underset{D_1}{x}\underset{D_2}{(x-4)}}\leq 0 \end{cases}$$



Qui il numeratore N è>0 per ogni valore di x in quanto è un trinomio di 2° grado con $\Delta<0$ *e 1° coeff. >0*

SCHEMA PER LA DISEQUAZIONE FRATTA
Sue soluzioni: $0<x<4$

Lo schema per il sistema si può evitare, data la semplicità della situazione: il sistema

$$\begin{cases} 3/2\leq x\leq 4 \\ 0<x<4 \end{cases}$$

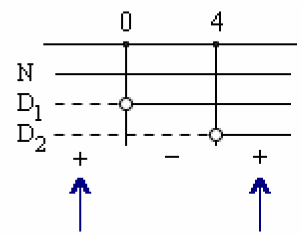
è verificato per

$$\boxed{3/2\leq x<4}$$

SOLUZIONI 2° SISTEMA

3° sistema

$$\begin{cases} x\geq 4 \\ \dfrac{x^2-(2x-3)}{x(x-4)}\geq 0 \quad \dfrac{\overset{N}{x^2-2x+3}}{\underset{D_1}{x}\underset{D_2}{(x-4)}}\geq 0 \end{cases}$$



SCHEMA PER LA DISEQUAZIONE FRATTA
Sue soluzioni: $x<0 \vee x>4$

Lo schema per il sistema si può evitare, data la semplicità della situazione: il sistema

$$\begin{cases} x\geq 4 \\ x<0 \vee x>4 \end{cases}$$

è verificato per

$$\boxed{x>4}$$

SOLUZIONI 3° SISTEMA

Facendo l'unione insiemistica degli intervalli trovati, ecco le soluzioni della disequazione:

$$\boxed{-3\leq x<0 \ \vee\ x\geq 1,\ ma\ x\neq 4}$$

18)

$$\boxed{\frac{|1-3x|-5}{|x-1|}<0}$$

Qui il denominatore è positivo per ogni *x*, tranne che per *x*=1 (con *x*=1 si annulla):
scriviamo dunque la condizione $x \neq 1$, per ricordarci che il valore 1 non può esser soluzione,
e mandiamolo via.
Avremo

$$\frac{|1-3x|-5}{\cancel{|x-1|}}<0 \quad (x \neq 1)$$

$$|1-3x|<5$$

$$-5<1-3x<5$$

$$-6<-3x<4$$

$$6>3x>-4$$

$$2>x>-4/3$$

$$\boxed{-\frac{4}{3}<x<2 \ \ldots \ ma \ x \neq 1}$$

19)

$$\boxed{\left|\frac{x-2}{x-4}\right|<1}$$

$$-1<\frac{x-2}{x-4}<1$$

Non avrai mica la tentazione di spedir via il denominatore moltiplicando per $(x-4)$?
In questo caso, NON FARLO, perché sarebbe *GRAVE ERRORE*:
infatti la quantità $(x-4)$ può assumere sia segno positivo che segno negativo,
e in una disequazione è possibile moltiplicare per una quantità solo se questa ha segno costante
(se poi ha segno positivo, il verso si conserva; se ha segno negativo, il verso cambia).
La doppia limitazione equivale invece al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-4}>-1 \\ \dfrac{x-2}{x-4}<1 \end{cases}$$

$$1a\ disequazione: \frac{x-2}{x-4}>-1 \quad \frac{x-2}{x-4}+1>0 \quad \frac{x-2+x-4}{x-4}>0 \quad \frac{2x-6}{x-4}>0 \quad x<3 \vee x>4$$

$$2a\ disequazione: \frac{x-2}{x-4}<1 \quad \frac{x-2}{x-4}-1<0 \quad \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}+4}{x-4}<0 \quad \frac{2}{x-4}<0 \quad x<4$$

$$Sistema: \begin{cases} x<3 \vee x>4 \\ x<4 \end{cases} \ da\ cui\ \boxed{x<3}$$

Se vuoi, puoi controllare che alle stesse soluzioni si perverrebbe
anche portando sotto la forma

$$\frac{|x-2|}{|x-4|}<1,$$

studiando il segno delle due espressioni entro stanghette
e distinguendo i vari casi.

20)

$$\left|\frac{x+3}{x-5}\right|>2$$

$$\frac{x+3}{x-5}<-2 \qquad \vee \qquad \frac{x+3}{x-5}>2$$

$$\frac{x+3}{x-5}+2<0 \qquad \vee \qquad \frac{x+3}{x-5}-2>0$$

$$\frac{x+3+2x-10}{x-5}<0 \quad \vee \quad \frac{x+3-2x+10}{x-5}>0$$

$$\frac{3x-7}{x-5}<0 \qquad \vee \qquad \frac{-x+13}{x-5}>0$$

$$7/3<x<5 \qquad \vee \qquad 5<x<13$$

quindi, in definitiva,

$$\boxed{7/3<x<13 \text{ ma } x\neq 5}$$

21)

$$\boxed{\left|\frac{3x-1}{x-3}\right|\leq 2}$$

$$-2\leq\frac{3x-1}{x-3}\leq 2$$

$$\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x-3}\geq -2\\[2mm] \dfrac{3x-1}{x-3}\leq 2\end{cases}$$

1a disequazione: $\frac{3x-1}{x-3}\geq -2$ $\quad \frac{3x-1}{x-3}+2\geq 0$ $\quad \frac{3x-1+2x-6}{x-3}\geq 0$ $\quad \frac{5x-7}{x-3}\geq 0$ $\qquad x\leq\frac{7}{5}\vee x>3$

2a disequazione: $\frac{3x-1}{x-3}\leq 2$ $\quad \frac{3x-1}{x-3}-2\leq 0$ $\quad \frac{3x-1-2x+6}{x-3}\leq 0$ $\quad \frac{x+5}{x-3}\leq 0$ $\qquad -5\leq x<3$

Sistema: $\begin{cases}x\leq\frac{7}{5}\vee x>3\\ -5\leq x<3\end{cases}$ da cui $\boxed{-5\leq x\leq\frac{7}{5}}$

22)

$$\boxed{\left|\frac{x^2-4}{x}\right|>3}$$

$$\frac{x^2-4}{x}<-3 \qquad \vee \qquad \frac{x^2-4}{x}>3$$

$$\frac{x^2-4}{x}+3<0 \qquad \vee \qquad \frac{x^2-4}{x}-3>0$$

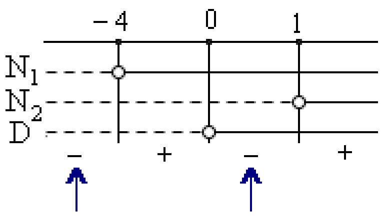
$$\frac{x^2-4+3x}{x}<0 \qquad \vee \qquad \frac{x^2-4-3x}{x}>0$$

$$\frac{x^2+3x-4}{x}<0 \qquad \vee \qquad \frac{x^2-3x-4}{x}>0$$

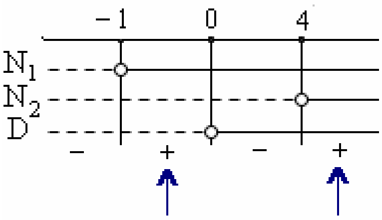
$$\frac{(x+4)(x-1)}{x}<0 \qquad \vee \qquad \frac{(x+1)(x-4)}{x}>0$$

$$\boxed{x<-4 \vee 0<x<1} \qquad \vee \qquad \boxed{-1<x<0 \vee x>4}$$

Prima disequazione
$$\frac{(x+4)(x-1)}{x}<0$$



Seconda disequazione
$$\frac{(x+1)(x-4)}{x}>0$$



In definitiva, le soluzioni della disequazione proposta possono essere scritte sotto la forma "compatta"

$$\boxed{x<-4 \vee (-1<x<1 \text{ ma } x\neq 0) \vee x>4}$$

23)

$$\left|x^2-9\right|+\left|x-3\right|>0$$

Un valore assoluto è sempre ≥ 0,
quindi la somma di due valori assoluti sarà a sua volta sempre ≥ 0,
e anzi sarà generalmente >0,
a meno che si annullino simultaneamente ENTRAMBI i valori assoluti.
Nel nostro caso, ci domandiamo,
possono i due valori assoluti annullarsi contemporaneamente entrambi?
Dunque:

$$x^2-9=0 \;\; per \;\; x=\pm 3$$

$$e \;\; x-3=0 \;\; per \;\; x=3$$

perciò in effetti *esiste* un valore di *x* (il valore 3)
per il quale si annulla *sia l'una che l'altra* espressione entro le stanghette,
quindi sia l'uno che l'altro valore assoluto.
Di conseguenza, la nostra disequazione è verificata per tutti i valori di *x*, tranne il 3:

$$\boxed{x\neq 3}$$

24)
$\left|x^2-x-2\right|+\left|2x^2+x-6\right|>0$

Un valore assoluto è sempre ≥ 0,
quindi la somma di due valori assoluti sarà a sua volta sempre ≥ 0,
e anzi sarà generalmente >0,
a meno che si annullino simultaneamente ENTRAMBI i valori assoluti.
Nel nostro caso, ci domandiamo,
possono i due valori assoluti annullarsi contemporaneamente entrambi?
Dunque:

$x^2-x-2=0 \;\; per \;\; x=-1 \vee x=2$

e

$2x^2+x-6=0 \;\; per \;\; x=-2 \vee x=\frac{3}{2}$

perciò *non esiste nessun* valore di x
per il quale si annullano *simultaneamente sia l'una che l'altra* espressione entro le stanghette,
quindi sia l'uno che l'altro valore assoluto.
Di conseguenza, la nostra disequazione è
$\boxed{\textit{SEMPRE VERIFICATA}}$, senza eccezioni.

25)
$\left|\frac{4x+3}{x^2+3}\right|<1$

Qui conviene decisamente spezzare in

$\frac{\left|4x+3\right|}{\left|x^2+3\right|}<1$

per approfittare del fatto che è $x^2+3>0 \;\forall x$
e riscrivere quindi sotto la forma più semplice

$\frac{\left|4x+3\right|}{x^2+3}<1$

Possiamo ora, **eccezionalmente in una disequazione**,
moltiplicare per il denominatore,
proprio perché questo è strettamente positivo per ogni valore di x:

$\left|4x+3\right|<x^2+3$

e a questo punto, *ancora una volta a motivo della positività* di x^2+3, scrivere

$-\left(x^2+3\right)<4x+3<x^2+3$

da cui:

$$\begin{cases} 4x+3>-x^2-3 \\ 4x\cancel{+3}<x^2\cancel{+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4x+6>0 \;\; \textit{sempre verificata} \; (\Delta<0) \\ x^2-4x>0 \;\;\; x(x-4)>0 \;\;\; x<0 \vee x>4 \end{cases}$$

Le **soluzioni** del sistema, quindi della disequazione proposta, sono
$\boxed{x<0 \vee x>4}$

26)

$3 < |x-4| < 5$

$3 < x-4 < 5 \ \vee \ -5 < x-4 < -3$

$\boxed{7 < x < 9 \quad \vee \ -1 < x < 1}$

In alternativa, ma è un po' più lungo:

$$\begin{cases} |x-4| > 3; \quad x-4 > 3 \vee x-4 < -3; \quad x > 7 \vee x < 1 \\ |x-4| < 5; \quad -5 < x-4 < 5; \quad -1 < x < 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 7 \vee x < 1 \\ -1 < x < 9 \end{cases} \quad \boxed{-1 < x < 1 \ \vee \ 7 < x < 9}$$

27)

$$\frac{3}{|x-4|} > 7$$

Se due numeri POSITIVI sono disuguali,
i loro reciproci sono disuguali in senso contrario!
(*Passando ai reciproci, tuttavia,*
occorrerà scrivere la condizione $\boxed{x \neq 4}$
legata alla presenza del denominatore $x-4$)

$$\frac{|x-4|}{3} < \frac{1}{7}$$

$7|x-4| < 3$

$|7x-28| < 3$

$-3 < 7x-28 < 3$

$25 < 7x < 31$

$$\boxed{\frac{25}{7} < x < \frac{31}{7} \ \ ma \ \ x \neq 4}$$