EQUAZIONI IRRAZIONALI: CORREZIONI

1)

$$\sqrt{2x-7}=x-5$$

$x-5\geq 0,\ \boxed{x\geq 5}$

$2x-7=(x-5)^2$

$2x-7=x^2-10x+25$

Porto tutto a secondo membro
e simultaneamente scambio i due membri di posto :

$x^2-12x+32=0$

$(x-4)(x-8)=0$

$\underset{non\ acc.}{\cancel{x=4}} \quad \vee \quad \boxed{x=8}$

Verifica per $x=8$:	*Invece, con* $x=4$:
$\sqrt{2\cdot 8-7}=8-5$	$\sqrt{2\cdot 4-7}=4-5$
$\sqrt{16-7}=3$	$\sqrt{8-7}=-1$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{1}=-1$
$3=3$ *OK*	$1=-1$ *NO*

2)

$$\sqrt{x^2+3}=4-x$$

$4-x\geq 0,\ -x\geq -4,\ \boxed{x\leq 4}$

$x^2+3=(4-x)^2$

$\cancel{x^2}+3=16-8x\cancel{+x^2}$

$8x=13$

$$\boxed{x=\frac{13}{8}}$$

4)

$$2\sqrt{x^2-x}=1-x$$

$1-x\geq 0,\quad \boxed{x\leq 1}$

$4\left(x^2-x\right)=(1-x)^2$

$4x^2-4x=1-2x+x^2$

$3x^2-2x-1=0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}=\frac{1\pm 2}{3}=\left\langle \begin{array}{l}\boxed{-\frac{1}{3}}\\ \boxed{1}\end{array}\right.$$

6)

$$\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x}=1$$

$\sqrt{1-2x}-1=x\quad (x\neq 0:$ infatti con la moltiplicazione per x se n'è andato il *denominatore* $x)$

$\sqrt{1-2x}=x+1$

$x+1\geq 0,\ \boxed{x\geq -1}$

$1-2x=(x+1)^2$

$\cancel{1}-2x=x^2+2x\cancel{+1}$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$\cancel{x=0} \vee \cancel{x=-4}$

non acc. *non acc.*

L'equazione è perciò IMPOSSIBILE.

9)

$x=\sqrt{8x-7}$

Scambio i due membri di posto e ottengo:

$\sqrt{8x-7}=x$

$\boxed{x\geq 0}$

$8x-7=x^2$

$x^2-8x+7=0$

$(x-1)(x-7)=0$

$\boxed{x=1} \vee \boxed{x=7}$

10)

$2\left(\sqrt{x}-x\right)=1-\sqrt{x}$

$2\sqrt{x}-2x=1-\sqrt{x}$

$3\sqrt{x}=2x+1$

$2x+1\geq 0\quad \boxed{x\geq -\frac{1}{2}}$

$9x=4x^2+4x+1$

$4x^2-5x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm 3}{8}=\left\langle \begin{array}{l}\boxed{1/4}\\ \boxed{1}\end{array}\right.$$

11)

$$\sqrt{4x+5}=2\left[x-\frac{1}{2}(x-1)\right]$$
$$\sqrt{4x+5}=2\left(x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$$
$$\sqrt{4x+5}=2x-x+1$$
$$\sqrt{4x+5}=x+1$$
$$x+1\geq 0,\quad \boxed{x\geq -1}$$

$$4x+5=(x+1)^2$$
$$4x+5=x^2+2x+1$$
$$x^2-2x-4=0$$
$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+4}=\left\langle \begin{array}{l} \cancel{1-\sqrt{5}}\ \textit{non acc.} \\ \boxed{1+\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Verifica per $x=1+\sqrt{5}$

(*fatta sul passaggio* $\boxed{\sqrt{4x+5}=x+1}$, *che precede l'elevamento al quadrato*):

$$\sqrt{4\left(1+\sqrt{5}\right)+5}=1+\sqrt{5}+1$$
$$\sqrt{4+4\sqrt{5}+5}=2+\sqrt{5}$$
$$\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}=2+\sqrt{5}$$
$$2+\sqrt{5}=2+\sqrt{5}\quad \textit{OK}$$

Invece con $x=1-\sqrt{5}$:

$$\sqrt{4\left(1-\sqrt{5}\right)+5}=1-\sqrt{5}+1$$
$$\sqrt{4-4\sqrt{5}+5}=2-\sqrt{5}$$

...e qui potremmo fermarci perché
si vede subito che l'uguaglianza non può essere verificata,
in quanto il secondo membro è un numero <0, e invece
il risultato dell'estrazione di una radice quadrata è sempre ≥ 0.
Comunque, se proseguiamo, otteniamo:

$$\sqrt{\left(\underset{>0}{\sqrt{5}-2}\right)^2}=2-\sqrt{5}\qquad (\textit{NOTA})$$
$$\sqrt{5}-2=2-\sqrt{5}\quad \textit{NO}$$

NOTA

Il radicando $4-4\sqrt{5}+5$ *è uguale, indifferentemente,*

a $\left(\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}\right)^2$ *oppure a* $\left(\underbrace{\sqrt{5}-2}_{>0}\right)^2$,

ma se voglio poi semplificare il radicale
devo scegliere l'espressione con base POSITIVA
altrimenti otterrei un numero negativo
come risultato dell'estrazione di una radice quadrata,
sbagliando perché, come ben sappiamo,
una radice quadrata dà sempre come risultato un numero ≥ 0

14)
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}=x+3$
$\boxed{x\geq -3}$

$2x=(x+3)^2$
$2x=x^2+6x+9$
$x^2+4x+9=0$
$IMPOSSIBILE\ (\Delta<0)$

16)
$\sqrt{2x-10}=\sqrt{x-7}$
$2x-10\geq 0,\ \boxed{x\geq 5}$
$x-7\geq 0,\ \boxed{x\geq 7}$
Osserviamo che delle due condizioni poste
possiamo fare il *sistema*
$\begin{cases} x\geq 5 \\ x\geq 7 \end{cases}$
ottenendo $x\geq 7$,
oppure (*come insegna la teoria*) tenere *una sola* delle due a piacere e buttare via l'altra.
Naturalmente, possiamo anche confrontare
le soluzioni che troveremo alla fine
con *ognuna* delle condizioni poste,
con il proposito di considerare una soluzione accettabile
solo se le verificherà simultaneamente entrambe.

Elevando al quadrato, otteniamo ora
$2x-10=x-7$
$\cancel{x=3}$ *non acc.*

18)
$\sqrt{x^2-x-5}=\sqrt{x-2}$
$x^2-x-5\geq 0,\ \boxed{x\leq\frac{1-\sqrt{21}}{2}\ \vee\ x\geq\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$
$x-2\geq 0,\ \boxed{x\geq 2}$
Osserviamo ancora una volta che fra le due condizioni poste
una a piacere si può eliminare
(ad esempio la prima, che è "antipatica"), per tenere solo l'altra:
quindi, in definitiva, potremo basare la diagnosi finale di accettabilità
sulla sola condizione $\boxed{x\geq 2}$

$x^2-x-5=x-2$
$x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$
$\cancel{x=-1}\ \vee\ \boxed{x=3}$
non acc.

22)

$\sqrt{x-4}=3$

$x-4=9$ (non è necessario porre alcuna condizione!)

$\boxed{x=13}$

25)

$\sqrt{x^2-4}=-5$

IMPOSSIBILE

(*il risultato dell'estrazione di una radice quadrata*
non può essere negativo)

27)

$\sqrt{3x-5}=0$

$3x-5=0$ (non è necessario porre alcuna condizione!)

$\boxed{x=5/3}$

29)

$\sqrt{2x-2}-1=\sqrt{x-2}$

$2x-2\ge 0,\ \boxed{x\ge 1}$

$x-2\ge 0,\ \boxed{x\ge 2}$

Trasportiamo in modo da rendere i due membri sicuramente positivi,
poi eleveremo al quadrato:

$\sqrt{2x-2}=1+\sqrt{x-2}$

$2x\cancel{-2}=1+x\cancel{-2}+2\sqrt{x-2}$

$-2\sqrt{x-2}=-x+1$

$2\sqrt{x-2}=x-1$

$x-1\ge 0,\ \boxed{x\ge 1}$

$4(x-2)=(x-1)^2$

$4x-8=x^2-2x+1$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0\quad \boxed{x=3}$ accettabile: soddisfa infatti *tutte* le condizioni poste

30)

$\sqrt{x+3}-2\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=0$

$x+3\geq 0,\ \boxed{x\geq -3}$

$x-1\geq 0,\ \boxed{x\geq 1}$

$\boxed{x\geq 0}$

Trasportiamo in modo da rendere i due membri sicuramente positivi, poi eleveremo al quadrato:

$\sqrt{x+3}=2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}$

$x+3=4x-4+4x+8\sqrt{x(x-1)}$

$-8\sqrt{x(x-1)}=7x-7$

$8\sqrt{x(x-1)}=7-7x$

$7-7x\geq 0,\ \boxed{x\leq 1}$

Dalle due condizioni $\boxed{x\geq 1}$ (*posta all'inizio*) *e* $\boxed{x\leq 1}$ (*posta ora*)
possiamo trarre che se l'equazione ha soluzione,
non potrà avere altro che la soluzione $x=1$.
Potremmo dunque concludere l'esercizio semplicemente andando a verificare
direttamente, per sostituzione, se il valore $x=1$ *è soluzione oppure no*
(*troveremmo risposta affermativa*!)
Se invece continuiamo "normalmente", avremo

$64x(x-1)=(7-7x)^2$

$64x^2-64x=49-98x+49x^2$

$15x^2+34x-49=0$

$15x^2-15x+49x-49=0$

$15x(x-1)+49(x-1)=0$

$(x-1)(15x+49)=0$

$\boxed{x=1}\ \vee\ \cancel{x=-\frac{49}{15}}$
non acc.

31)

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x}=1$

$2x+3\geq 0,\ \boxed{x\geq -\frac{3}{2}}$

$2x\geq 0,\ \boxed{x\geq 0}$

Trasportiamo per rendere positivi entrambi i membri:

$\sqrt{2x+3}=\sqrt{2x}+1$

$\cancel{2x}+3=\cancel{2x}+1+2\sqrt{2x}$

$-2\sqrt{2x}=-2$

$\sqrt{2x}=1$

Non c'è nessuna condizione da porre prima di elevare al quadrato,
perché il 2° membro è una *costante positiva*

$2x=1\ \ \boxed{x=\frac{1}{2}}$

32)

$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

$x+4\geq 0 \quad \boxed{x\geq -4}$

$x+1\geq 0 \quad \boxed{x\geq -1}$

$x+2\geq 0 \quad \boxed{x\geq -2}$

$\boxed{x\geq 0}$

Trasportiamo per rendere positivi entrambi i membri :

$\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

Eleviamo al quadrato:

$\cancel{x}+4\cancel{+x}+2\sqrt{x(x+4)}=\cancel{x}+1\cancel{+x}+2+2\sqrt{(x+1)(x+2)}$

$2\sqrt{x(x+4)}=2\sqrt{(x+1)(x+2)}-1$

Le condizioni di realtà poste precedentemente
ci assicurano già la positività dei radicandi ottenuti :
non c'è pertanto per ora nessun'altra condizione da porre.

Trasportiamo per rendere positivi entrambi i membri :

$2\sqrt{x(x+4)}+1=2\sqrt{(x+1)(x+2)}$

Eleviamo al quadrato:

$4x(x+4)+4\sqrt{x(x+4)}+1=4(x+1)(x+2)$

$\cancel{4x^2}+16x+4\sqrt{x(x+4)}+1=\cancel{4x^2}+8x+4x+8$

$4\sqrt{x^2+4x}=-4x+7$

$-4x+7\geq 0 \quad -4x\geq -7 \quad \boxed{x\leq \frac{7}{4}}$

$16\left(x^2+4x\right)=16x^2-56x+49$

$\cancel{16x^2}+64x=\cancel{16x^2}-56x+49$

$120x=49 \qquad \boxed{x=\frac{49}{120}}$ che è accettabile perché soddisfa *tutte* le condizioni poste.

34)

$2\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x}+3$

$\boxed{x \geq 0}$

$x-2 \geq 0 \quad \boxed{x \geq 2}$

$2\sqrt{x}-\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=3$

$\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=3$

I due membri sono positivi:
possiamo elevare al quadrato.

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)^2=9$

$x+x-2+2\sqrt{x(x-2)}=9$

$2\sqrt{x(x-2)}=11-2x$

$11-2x \geq 0 \quad \boxed{x \leq \frac{11}{2}}$

$4x(x-2)=(11-2x)^2$

$\cancel{4x^2}-8x=121-44x\cancel{+4x^2}$

$36x=121$

$\boxed{x=\frac{121}{36}}$

35)

$\sqrt[3]{7x-1}+1=x$

$\sqrt[3]{7x-1}=x-1$

Non occorre porre alcuna condizione,
perché si sta per elevare al CUBO (esponente DISPARI)!

$7x-1=(x-1)^3$

$7x\cancel{-1}=x^3-3x^2+3x\cancel{-1}$

$x^3-3x^2-4x=0$

$x\left(x^2-3x-4\right)=0;\;\; x(x+1)(x-4)=0$

$\boxed{x=0 \vee x=-1 \vee x=4}$

36)

$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1}=0$

Non occorre porre alcuna condizione,
perché si sta per elevare al CUBO (esponente DISPARI)!
Occorre però distribuire i termini nei due membri in modo adeguato,
affinché dopo l'elevamento al cubo l'equazione diventi più semplice.

$\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x+1}$

$x^2=x+1$

$x^2-x-1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\boxed{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

37)

$\sqrt{3-x}+x=\sqrt{x^2+3}$

$3-x\geq 0 \quad \boxed{x\leq 3}$

$x^2+3\geq 0 \quad \boxed{\textit{sempre verificata}}$

Qui *non c'è modo di far sì che i due membri siano certamente positivi*
(x potrebbe pure essere <0!)
Porremo, sì, le varie condizioni,
ma *alla fine* saremo comunque costretti
alla *verifica* (sostituendo nell'equazione di partenza) di accettabilità delle soluzioni che troveremo.

$\cancel{3}-x\cancel{+x^2}+2x\sqrt{3-x}=\cancel{x^2}\cancel{+3}$

$2x\sqrt{3-x}=x$

Semplifichiamo per x,
annotando che x=0 è soluzione dell'equazione (soluzione "trovata per strada"):

$\boxed{x=0}$

$2\sqrt{3-x}=1$

$4(3-x)=1$

$12-4x=1$

$-4x=-11$

$\boxed{x=\frac{11}{4}}$

La VERIFICA (falla tu...) mostra che ENTRAMBE LE SOLUZIONI SONO ACCETTABILI.

Prova a fare, al computer o "a mano", anche una risoluzione grafica! Confermerà i risultati trovati.

38)

$\sqrt{x^2-1}=2x+\sqrt{x^2+3}$

$x^2-1\geq 0 \quad \boxed{x\leq -1 \ \vee \ x\geq 1}$

$x^2+3\geq 0 \quad \boxed{\textit{sempre verificata}}$

Non possiamo in alcun modo, neppure con un trasporto di termini,
far sì che *entrambi* i membri siano sicuramente positivi:
x potrebbe infatti essere <0!
Alla fine, saremo costretti ad una verifica per sostituzione.

$\cancel{x^2}-1=4x^2+4x\sqrt{x^2+3}\cancel{+x^2}+3$

$-4x\sqrt{x^2+3}=4x^2+4$

$-x\sqrt{x^2+3}=x^2+1$

$x^2\left(x^2+3\right)=\left(x^2+1\right)^2$

$\cancel{x^4}+3x^2=\cancel{x^4}+2x^2+1$

$x^2=1$

$x=\left\langle \begin{array}{l}\boxed{-1}\\ \cancel{1}\ \textit{non acc., come si vede sostituendo nell'equazione iniziale}\end{array}\right.$

39)

$\sqrt{x}+x=\sqrt{x^2+x+1}$

Condizioni:

$\boxed{x \geq 0}$

$x^2+x+1 \geq 0$ *sempre verificata* $(\Delta < 0)$

La condizione $x \geq 0$ ci dice che
i due membri sono certamente ≥ 0
per ogni valore ammissibile di x:
elevando al quadrato, siamo certi
che non potranno presentarsi soluzioni non accettabili.

$\cancel{x}+\cancel{x^2}+2x\sqrt{x}=\cancel{x^2}+\cancel{x}+1$

Ancora una volta, la positività di entrambi i membri
è assicurata dalla condizione già posta $x \geq 0$:
elevando al quadrato, siamo certi
che non potranno presentarsi soluzioni non accettabili.

$4x^3=1$

$x^3=\frac{1}{4}$

$\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$ *certamente accettabile*

(*una risoluzione grafica lo confermerebbe*).