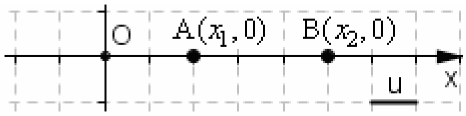
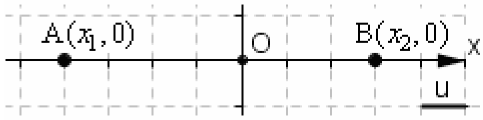
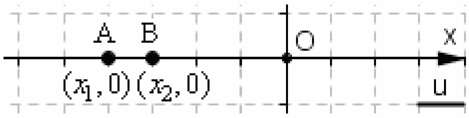
2. DISTANZA FRA DUE PUNTI SUL PIANO CARTESIANO

Consideriamo dapprima il caso di **due punti che si trovano entrambi sull'asse *x*** quindi hanno ordinata 0:
$A(x_1, 0)$ e $B(x_2, 0)$.

	*Dal disegno*: $d(A,B) = AB = 3$ ... *Osserviamo che anche* $x_2 - x_1 = 5 - 2 = 3$
	*Dal disegno*: $d(A,B) = AB = 7$ ... *Osserviamo che anche* $x_2 - x_1 = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7$
	*Dal disegno*: $d(A,B) = AB = 1$ .... *Osserviamo che anche* $x_2 - x_1 = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1$

Perciò **per calcolare la distanza fra due punti, entrambi appartenenti all'asse *x*,**
ci basterà calcolare la differenza fra le loro ascisse
(abbiamo visto che ciò è vero negli esempi proposti;
riflettendo un attimo per generalizzare, si intuisce che il procedimento sarà valido *sempre*;
tuttavia, della regola è anche possibile dare una *dimostrazione* rigorosa.
Noi preferiamo rimandare questa a una fase successiva, perché quando avremo introdotto l'*Identità di Chasles*, essa permetterà di organizzare tale dimostrazione molto comodamente, senza dover distinguere vari casi).

E' evidente comunque che si dovrà
scrivere per prima l'ascissa maggiore e poi sottrarre da essa quella minore,
perché se si facesse il viceversa, si otterrebbe un numero negativo … ad es., con riferimento alle nostre tre figure, *non* sarebbe stato corretto scrivere $d(A,B) = x_1 - x_2 = x_A - x_B$, perché la differenza $x_1 - x_2$ è negativa.

Tuttavia, capita a volte di *non sapere* quale sia l'ascissa maggiore,
magari perché le due ascisse sono *incognite*, oppure perché sono *dipendenti da un parametro*.
Supponiamo che i due punti di cui devo calcolare la distanza siano $P(2k-3,\ 0)$ e $Q(k+4,\ 0)$.
Come farò a stabilire quale fra le due ascisse è la maggiore?
Il problema è che fra le due quantità $2k-3$ e $k+4$, può essere maggiore la prima oppure la seconda,
a seconda del valore che si pensa di attribuire al parametro *k*!
Ad esempio, con $k = 10$ è maggiore $2k-3$, con $k = 5$ è maggiore $k+4$.

Potrei allora risolvere la questione in questo modo:
dati due punti posti entrambi sull'asse *x*, per calcolarne la distanza
io farò la differenza fra le loro ascisse, prendendole in un ordine *qualsiasi*,
***con l'intesa che*, se da questo calcolo dovesse uscire un valore *negativo*,**
il risultato corretto sarà … l'*opposto* del numero da me trovato.
Ma ciò equivale a fare il **valore assoluto** della differenza delle ascisse! E in definitiva si può dire che

la distanza fra due punti, appartenenti entrambi all'asse *x*,
è IL VALORE ASSOLUTO della differenza fra le loro ascisse (prese in un ordine qualsiasi):

$$\mathbf{d(A,B)} = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

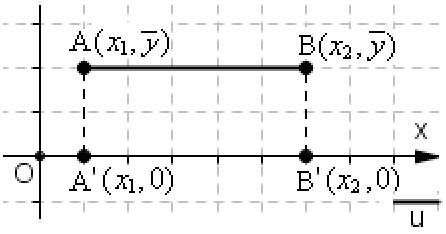
Si può evitare il valore assoluto soltanto quando si riesce ad impostare la differenza
in modo che questa sia sicuramente positiva, ossia quando si sa per certo
quale fra le due ascisse è la maggiore, così da poter scrivere
(ascissa maggiore) – (ascissa minore)

ESEMPIO
- $A(7,0);\ B(3,0) \to d(A,B) = |3-7| = |-4| = 4$ o anche, più semplicemente,
  $d(A,B) = 7 - 3 = 4$ (scrivo prima l'ascissa maggiore e le sottraggo l'ascissa minore)

ALTRI ESEMPI:
- $A(5,0);\ B(-1,0);\ C(3,0) \to AB = |-1-5| = |-6| = 6;\ \ AC = |3-5| = |-2| = 2;\ \ BC = |3-(-1)| = |4| = 4$
  $P(2k-3, 0);\ Q(k+4, 0) \to PQ = |(k+4)-(2k-3)| = |k+4-2k+3| = |7-k| = |k-7|$ (*NOTA*)

NOTA: due numeri fra loro opposti hanno ugual valore assoluto:
di qui la possibilità, se lo si desidera, di cambiare i segni entro le stanghette

La stessa formula $\mathbf{d(A,B)} = \left|\textbf{\textit{differenza ascisse}}\right| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$
vale anche se i due punti A, B, pur non giacendo sull'asse *x*, hanno la stessa ordinata e di conseguenza stanno su di una retta che è parallela all'asse *x*.



Infatti (figura qui a sinistra):
A' e B' sono le proiezioni di A, B rispettivamente, sull'asse *x*.
A' ha dunque la stessa ascissa di A, e B' la stessa ascissa di B.
$A(x_1,\overline{y});\ B(x_2,\overline{y});\ A'(x_1,0);\ B'(x_2,0)$
$AB = A'B' = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$
(A' e B' stanno sull'asse *x* per cui si può applicare una formula già vista).

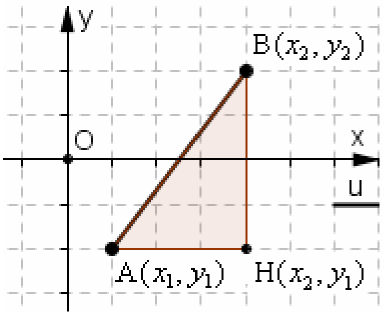
NOTA - $\overline{y}$ si legge "*y* segnato". La soprallineatura è usata per rendere l'idea di un valore "fissato".

ESEMPIO (con riferimento alla figura precedente): $A(1,2);\ B(6,2)\ \rightarrow\ AB = |6-1| = |1-6| = 5$

Se i due punti considerati si trovano entrambi sull'asse *y* o su di una parallela all'asse *y*
(insomma: se hanno la stessa ascissa, nulla o non nulla), avremo analogamente la formula:
$$\mathbf{d(A,B)} = \left|\textbf{\textit{differenza ordinate}}\right| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

ESEMPIO: $L(-3,2);\ M(-3,-8)\ \rightarrow\ LM = |-8-2| = |2-(-8)| = 10$

Occupiamoci infine del **CASO GENERALE**.
Tracciando due opportuni segmenti, uno orizzontale e l'altro verticale,
faremo sì che AB diventi l'ipotenusa di un triangolo rettangolo al quale applicheremo il teorema di Pitagora.



$A(x_1,y_1)\quad B(x_2,y_2)$
$H(x_2,y_1)$ (H *ha la stessa ascissa di* B *e la stessa ordinata di* A)

Caso generale

$$d(A,B) = AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\quad (NOTA)$$

NOTA: il quadrato rende inutili le stanghette di valore assoluto.
Pensa ad esempio che $|-5|^2 = (-5)^2,\ \ |+7|^2 = (+7)^2$

ESEMPIO (con riferimento alla figura):
$A(1,-2);\ B(4,2)$
$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

ALTRO ESEMPIO:

$C(-1,3);\ D(-8,27)\ \rightarrow\ CD = \sqrt{(-8-(-1))^2 + (27-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$

RICAPITOLAZIONE

Se i due punti hanno la STESSA ORDINATA:	Se i due punti hanno la STESSA ASCISSA:	CASO GENERALE:
$\boldsymbol{d(A,B) = \lvert x_2 - x_1 \rvert}$	$\boldsymbol{d(A,B) = \lvert y_2 - y_1 \rvert}$	$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

OSSERVAZIONE
La formula relativa al "caso generale" è applicabile, volendo, anche ai casi in cui i due punti abbiano ugual ascissa o ugual ordinata (qui, comunque, sono più comode le due formule "specifiche").

Con riferimento all' OSSERVAZIONE:
infatti, se, ad es., è $y_1 = y_2$, si ha $d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = |x_2 - x_1|$

Ad esempio, i punti (9, 1) e (–3, 1) hanno la stessa ordinata. Per calcolarne la distanza, si può utilizzare

♪ tanto la formula specifica per punti di uguale ordinata: $AB = |-3-9| = |-12| = 12$

♫ quanto la formula generale: $AB = \sqrt{(-3-9)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 0^2} = \sqrt{144+0} = \sqrt{144} = 12$

ESERCIZI SVOLTI SULLA DISTANZA DI DUE PUNTI

1) Determina il perimetro del triangolo di vertici $A(-4, 0);\ B(-13, -12);\ C(1, -12)$

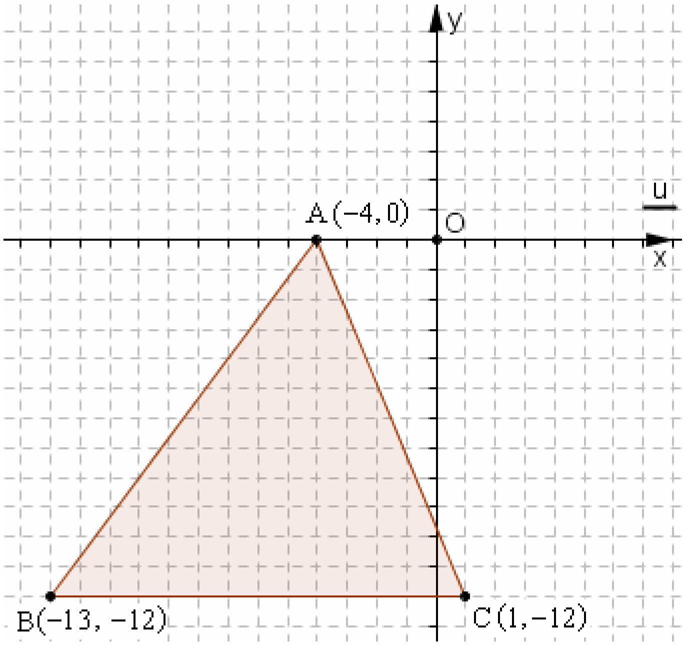
$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-13-(-4)\right)^2+\left(-12-0\right)^2} = \\ &= \sqrt{(-9)^2+(-12)^2} = \sqrt{81+144} = \\ &= \sqrt{225} = 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AC} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \\ &= \sqrt{\left(1-(-4)\right)^2+\left(-12-0\right)^2} = \\ &= \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \\ &= \sqrt{169} = 13\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} = |x_2-x_1| = |1-(-13)| = |14| = 14$

(comunque l'uso delle stanghette era superfluo perché siamo partiti dall'ascissa maggiore sottraendole quella minore)

$2p(\mathrm{ABC}) = 15+13+14 = 42$

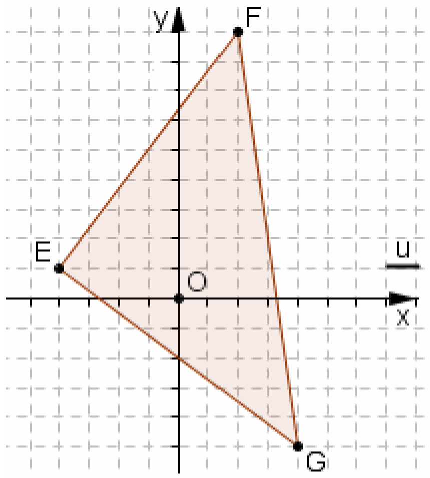


2) Dimostra che il triangolo di vertici $E(-4,1);\ F(2,9);\ G(4,-5)$ è isoscele, e calcola la sua base.

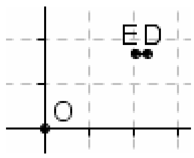
$$\begin{aligned}\mathrm{EF} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{\left(2-(-4)\right)^2+\left(9-1\right)^2} = \\ &= \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{EG} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{\left(4-(-4)\right)^2+\left(-5-1\right)^2} = \\ &= \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 = \mathrm{EF}!!!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{FG} &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \\ &= \sqrt{\left(4-2\right)^2+\left(-5-9\right)^2} = \\ &= \sqrt{2^2+(-14)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\end{aligned}$$



3) Trova la lunghezza del segmento DE di estremi $D\left(\sqrt{5},\sqrt{3}\right);\ E\left(2,\sqrt{3}\right)$



$$\mathrm{DE} = \left|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}\right| = \boxed{\sqrt{5}-2} \approx 2{,}24-2 = 0{,}24$$

Ovviamente, si sarebbe potuto anche partire dall'ascissa maggiore per sottrarle quella minore, evitando così di dover introdurre il simbolo di valore assoluto:

$\mathrm{DE} = (\textit{ascissa maggiore}) - (\textit{ascissa minore}) = \sqrt{5}-2$

4) Sono dati $A(0, k)$ e $B(0, 8-k)$.
Per quali valori di k la distanza di questi punti vale 6?

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = |(8-k)-k| = |8-2k|; \quad |8-2k| = 6 \leftrightarrow 8-2k = \pm 6 \left\langle \begin{array}{l} 8-2k=6;\ -2k=-2;\ k=1 \\ 8-2k=-6;\ -2k=-14;\ k=7 \end{array}\right.$$

In effetti, con $k=1$ *si ha* $\mathrm{A}(0,1)$ *e* $\mathrm{B}(0,7)$ *da cui* $\mathrm{AB}=6$;
con $k=7$ *si ha* $\mathrm{A}(0,7)$ *e* $\mathrm{B}(0,1)$ *da cui* $\mathrm{AB}=6$