

7. ESERCIZI

SULLA DISTANZA FRA DUE PUNTI

- 1) Calcola le distanze fra le seguenti coppie di punti:
 - a) $A(0,2); B(6,10)$
 - b) $A(-8,3); B(7,-5)$
 - c) $A(0,-3); B(0,-7)$
 - d) $A(2,-1); B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$
 - e) $A(10,-1); B(6,2)$
 - f) $A(3,42); B(12,2)$
 - g) $A\left(-\frac{1}{6},-2\right); B\left(\frac{3}{2},2\right)$
 - h) $A(1,1); B(\pi,0)$
 - i) $O(0,0); P(a,b)$
- 2) Determina il perimetro del triangolo di vertici $A(1,-4); B(13,-9); C(1,0)$
- 3) Determina il perimetro del triangolo di vertici $D(-7,3); E(7,3); F(2,-9)$
- 4) Trova il perimetro di PQR, con $P(-4,2); Q(-1,-2); R(5,6)$ (il risultato conterrà un radicale)
- 5) Il triangolo di vertici $D(-3,3); E(0,-1); F(-7,0)$ è isoscele: dimostrarlo, e calcola la sua base.
- 6) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,6); B(10,1); C(7,-3); D(-5,2)$ è un parallelogrammo, utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
- 7) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,2); B\left(0,\frac{7}{2}\right); C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right); D\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è un quadrato, utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
- 8) Verifica che il triangolo di vertici $O(-2,-1); A(10,-10); B(22,6)$ è rettangolo utilizzando esclusivamente la formula per la distanza fra due punti.
- 9) Determina quel punto P dell'asse y che è equidistante da $A(4,-1)$ e da $B(3,-2)$ (indicazione: il generico punto dell'asse y ha coordinate $(0, y)$; il problema è perciò risolto dall'equazione ...)
- 10) Determina quel punto P dell'asse x che è equidistante da $O(0,0)$ e da $Q\left(-\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$ (indicazione: il generico punto dell'asse x è $(x,0)$; il problema è perciò risolto dall'equazione ...)
- 11) Quale punto della retta $y = 1 - x$ è equidistante dall'origine e dal punto $A(4,2)$?
Indicazione: un generico punto della retta $y = 1 - x$ ha coordinate $(x, 1 - x)$...
- 12) Determina il centro e il raggio della circonferenza passante per i tre punti $A(0,2); B(1,-1); C(8,-2)$ (indicazione: il centro è quel punto P, di coordinate (x, y) , tale che $PA = PB = PC$.
Basterà perciò impostare le due equazioni $PA = PB$ e $PA = PC$ e porle a sistema ...)

SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

- 13) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo
 - a) $A(3,5); B(-1,9)$
 - b) $A(-4,0); B(-3,0)$
 - c) $A(-2,-4); B(0,2)$
 - d) $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right); B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$
 - e) $A(k,-3); B(1,-3)$
 - f) $A(a+b, a-b); B(a-b, b)$
 - g) $A(3.6, 0.4); B(1.4, -0.5)$
 - h) $A\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right); B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$
- 14) Calcola le coordinate dei punti medi I, L, M, N dei lati del quadrilatero ABCD, essendo $A(-3,1); B(1,-5); C(5,7); D(1,7)$
Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi è sempre un parallelogrammo: verificalo in questo caso particolare, constatando i lati opposti di ILMN sono a due a due uguali.
- 15) M è il punto medio di PQ, essendo $P(0,1); Q(-4,3)$. Che coordinate ha N, punto medio di PM?
- 16) Nell'esercizio 6 si è verificato che ABCD, con $A(-2,6); B(10,1); C(7,-3); D(-5,2)$, è un parallelogrammo; ma allora le sue diagonali dovrebbero tagliarsi scambievolmente per metà, vale a dire i loro punti medi dovrebbero coincidere. Verificalo.
- 17) Se $M(1,-1)$ è il punto medio del segmento AB e $A(-4,3)$, quali sono le coordinate di B?
- 18) Se $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$ è il punto medio del segmento AB e $A\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$, quali sono le coordinate di B?
- 19) Trova le coordinate del punto R, simmetrico di $T(-4,2)$ rispetto a $S(-1,-3)$
- 20) Trova il quarto vertice del parallelogrammo che ha tre vertici in $A\left(-3,\frac{13}{2}\right); B(-2,4); C(3,2)$
- 21) Per quale valore di k il segmento di estremi $A(3,1); B(k, k)$ ha come punto medio il punto $(k-1, k-3)$?

SULL'EQUAZIONE DI UNA CURVA (FORMA ESPLICITA, FORMA IMPLICITA)

ESEMPI

- Portare l'equazione $8x - 2y - 1 = 0$ in forma esplicita

Si tratta di isolare y a primo membro:

$$8x - 2y - 1 = 0; \quad -2y = -8x + 1; \quad 2y = 8x - 1; \quad y = \frac{8x - 1}{2}; \quad \boxed{y = 4x - \frac{1}{2}}$$

- Viceversa: Portare l'equazione $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$ in forma implicita

Portare tutto a 1° membro, in modo che il 2° membro sia 0; sarà bene mandare pure via i denominatori:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12}; \quad 12y = -9x + 1 \text{ (abbiamo moltiplicato per 12); } \quad \boxed{9x + 12y - 1 = 0}$$

ESERCIZI

22) Porta le seguenti equazioni in forma esplicita:

- | | | |
|--------------------------|------------------------|---|
| a) $x + y - 1 = 0$ | b) $3x - y + 4 = 0$ | c) $x + 4y - 6 = 0$ |
| d) $2x + 3y = 0$ | e) $x - 5y - 10 = 0$ | f) $4x - 3y = 2$ |
| g) $y + x^2 - x + 6 = 0$ | h) $x^2 - 2y - 4x = 0$ | i) $xy + 12 = 0$ |
| j) $y^2 - x^2 = 4$ | k) $xy + 2y - 1 = 0$ | l) $y^2 + 2y - x = 0$ (eq. di 2° grado) |

23) Porta le seguenti equazioni in forma implicita:

- | | | | |
|------------------------|------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| m) $y = -3x + 8$ | n) $y = x + 2$ | o) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$ | p) $y = \frac{x - 7}{2}$ |
| q) $y = -\frac{4}{3}x$ | r) $y = x^2 + x$ | s) $\frac{x}{y} = 3$ | t) $y = \sqrt{x}$ |

SULL'APPARTENENZA DI UN PUNTO A UNA CURVA

24) E' data la curva $C: x^2 + y^2 = 25$.

Stabilire quali fra i punti seguenti vi appartengono: $A(-4, 3)$; $B(1, 6)$; $C(0, -5)$

25) E' data la curva di equazione $xy = 6$.

Stabilire quali fra i punti seguenti vi appartengono: $P(4, 3/2)$; $Q(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$; $R(4, 2)$

26) Per quale valore del parametro k il punto $A(3, 2)$ appartiene alla curva di equazione $(k - 1)x + ky + 8 = 0$?

27) Per quale valore di a la curva $x^2 - y^2 + 2ax + 3a - 1 = 0$ passa per l'origine?

28) Determinare m in modo che il punto $P(m, m + 1)$ appartenga alla retta $x + y - 5 = 0$

29) Trovare i punti di ascissa -3 della curva $x^2 + y^2 = 25$

30) Trovare il punto di ordinata 2 della retta $r: 5x - y + 1 = 0$

SULL'INTERSEZIONE DI DUE CURVE

31) Trova il punto d'intersezione delle due rette $r_1: y = x + 3$ e $r_2: y = -2x + 9$.

32) Determina i vertici del triangolo i cui lati sono le rette di equazioni: $y = 2$, $y = 4x + 10$, $y = 5 - x$

33) In quale punto si tagliano le due rette $r_1: 2x - y - 3 = 0$ e $r_2: 6x - 3y - 2 = 0$?

34) Trova i punti di intersezione fra: $C: x^2 + y^2 = 25$ ed $r: x + 3y + 15 = 0$ (sistema di grado sup. al 1°)

35) Trova i punti comuni alla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ e all'iperbole $xy = 6$ (sistema di grado sup. al 1°)

SULLA DIVISIONE DI UN SEGMENTO IN PARTI, E SUL BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

36) $A(1, 1)$; $B(9, 5)$. Determina i punti P, Q, R, S, T che dividono il segmento AB , rispettivamente:

a) in parti proporzionali ai numeri 3 e 5 (P) b) in parti proporzionali ai numeri 3 e 2 (Q)

c) in modo che sia $AR = \frac{1}{3}RB$ d) in modo che sia $AS = \frac{1}{3}AB$ e) in modo che sia $AT = -2AB$

37) Determina il baricentro:

a) di ABC , con $A(3, 2)$; $B(10, -5)$; $C(-1, -3)$ b) di DEF , con $D(-3, -2)$; $E(-1, 0)$; $F(2, 4)$

c) di ILM , con $I\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{3}\right)$; $L\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$; $M\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

38) Se due vertici di ABC sono $A(-3, 4)$; $B(0, 2)$ e il baricentro è $G(1, 3)$, che coordinate ha il vertice C ?

39) Se un vertice di ABC è $A(3, -2)$ e il baricentro è $G(-1, 4)$, che coordinate ha il punto medio M di BC ?

40) Se un vertice del triangolo ABC è $A(5, 5)$ e il baricentro è $G(-19, -5)$, quanto misura la mediana AM ?

RISPOSTE

- 1) a) 10 b) 17 c) 4 d) $5/2$ e) 5 f) 41 g) $13/3$ h) $\sqrt{\pi^2 - 2\pi + 2} \approx 2,36$ i) $\sqrt{a^2 + b^2}$
 2) 32 3) 42 4) $15 + \sqrt{97}$ 5) In effetti, è $\overline{DE} = \overline{DF} = 5$. $base = \overline{EF} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
 6) Occorrerà controllare che i lati opposti siano a due a due uguali. E si trova $AB = DC = 13$ e $AD = CB = 5$.
 7) Si deve verificare che i quattro lati sono uguali, e pure le diagonali sono uguali!
 Si trova $AB = BC = CD = DA = 5/2$, $AC = BD = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$
 8) Basta verificare che la somma dei quadrati di due lati uguaglia il quadrato del lato rimanente: si potrà allora concludere che il triangolo è rettangolo per l'inverso del Teorema di Pitagora.
 9) L'equazione è $\sqrt{(0-4)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (y+2)^2}$
 e per mandar via le radici si eleveranno al quadrato entrambi i membri. Si trova $P(0,2)$.
 10) Analogo al problema precedente. Si trova $P(-4,0)$.
 11) Il punto è $P(4,-3)$. Il problema si risolve con l'equazione $\sqrt{(x-0)^2 + (1-x-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (1-x-2)^2}$
 12) Il centro è $(5,2)$, il raggio è 5. Il sistema risolvibile è $\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y+2)^2} \end{cases}$
 13) a) $(1,7)$ b) $(-\frac{7}{2}, 0)$ c) $(-1,-1)$ d) $(\frac{3}{8}, \frac{4}{15})$ e) $(\frac{k+1}{2}, -3)$ f) $(a, \frac{a}{2})$ g) $(2,5, -0,05)$ h) $(-\frac{1}{8}, -\frac{2}{3})$
 14) $(-1,-2)$; $(3,1)$; $(3,7)$; $(-1,4)$; due lati opposti di ILMN misurano 5 e gli altri due 6
 15) $N(-1, \frac{3}{2})$ 16) In effetti, sia AC che BD hanno per punto medio $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$
 17) $B(6,-5)$ 18) $B(\frac{7}{6}, -1)$ 19) $R(2,-8)$ 20) $D(2, \frac{9}{2})$
 21) Per nessun valore di k : dovrebbe risultare simultaneamente sia $\frac{3+k}{2} = k-1$ che $\frac{1+k}{2} = k-3$,
 ma le due equazioni hanno soluzioni diverse: non esiste un valore di k che le soddisfi entrambe.
 22) a) $y = -x + 1$ b) $y = 3x + 4$ c) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
 d) $y = -\frac{2}{3}x$ e) $y = \frac{1}{5}x - 2$ f) $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$
 g) $y = -x^2 + x - 6$ h) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ i) $y = -\frac{12}{x}$ (la condizione $x \neq 0$ si può scrivere, ma a ben guardare è inutile: sapresti dire perché?)
 j) $y = \pm\sqrt{x^2 + 4}$ k) $y = \frac{1}{x+2}$ l) $y = -1 \pm \sqrt{1+x}$
 23) m) $3x + y - 8 = 0$ n) $\begin{cases} -x + y - 2 = 0 \\ o \ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ o) $\begin{cases} -5x + 15y + 3 = 0 \\ o \ 5x - 15y - 3 = 0 \end{cases}$ p) $\begin{cases} -x + 2y + 7 = 0 \\ o \ x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$
 q) $4x + 3y = 0$ r) $x^2 + x - y = 0$ s) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ con \ y \neq 0 \end{cases}$ t) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ con \ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
 24) A: sì, appartiene B: no C: sì 25) P: sì Q: sì R: no 26) $k = -1$ 27) $a = 1/3$
 28) $m = 2$ 29) $(-3,-4)$; $(-3,4)$ 30) $(1/5, 2)$ 31) $(2, 5)$ 32) $(-2,2)$; $(3,2)$; $(-1,6)$
 33) In nessun punto: sono parallele 34) $A(0,-5)$; $B(-3,-4)$
 35) 4 intersezioni: $(\frac{\sqrt{37} \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{37} \mp \sqrt{13}}{2})$; $(\frac{-\sqrt{37} \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{-\sqrt{37} \mp \sqrt{13}}{2})$
 36) $P(4, \frac{5}{2})$ $Q(\frac{29}{5}, \frac{17}{5})$ $R(3,2)$ $S(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$ $T(-15,-7)$ 37) a) $(4,-2)$ b) $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ c) $(\frac{1}{36}, -\frac{29}{36})$
 38) $C(6,3)$ 39) $M(-3,7)$ 40) $AM = 39$

ALTRI ESERCIZI (risposte alla pagina successiva)

- 41) I punti (x, y) del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano le due condizioni $-3 \leq x \leq 5$, $5 \leq y \leq 11$, formano un rettangolo.
Qual è la sua area?
Che coordinate ha il punto di intersezione delle diagonali?
- 42) Che figura geometrica formano, sul piano cartesiano,
a) i punti per i quali il valore assoluto dell'ordinata vale 1?
b) i punti (x, y) per i quali $y > x$?
c) i punti (x, y) per i quali $x^2 + y^2 > 25$?
- 43) E' possibile, sul piano cartesiano, trovare 3 punti A, B, C tali che $AB = 32$, $BC = 16$, $AC = 8$?
E tre punti P, Q, R per cui $PQ = 12$, $QR = 8$, $RP = 4$?
- 44) Quali sono i punti sull'asse x che "vedono" il segmento AB, con $A(-3, 4)$ e $B(2, 1)$, sotto un angolo retto?
Puoi rispondere a questa domanda conoscendo esclusivamente la formula per la distanza fra due punti e il Teorema di Pitagora col suo inverso!
(Equazione di 2° grado)
- 45) Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dai due punti $O(0, 0)$ e $A(2, 2)$.
Verifica che i due punti di coordinate $(1, 1)$ e $(0, 2)$ soddisfano entrambi, com'era prevedibile, l'equazione trovata.
Porta questa in forma esplicita e disegna la curva: vedrai che si tratta, ovviamente, di una retta.
In Geometria, che nome si dà a questa retta?
- 46) Se un punto P ha coordinate (x, y) , qual è l'espressione, contenente x e/o y , che fornisce la sua distanza
a) dall'origine
b) dall'asse x
c) dall'asse y ?
- 47) Qual è il luogo dei punti che hanno la proprietà di essere equidistanti dall'origine $O(0, 0)$ e dall'asse x ?
Puoi rispondere sia col ragionamento geometrico puro, senza pensare alle coordinate, sia scrivendo l'equazione del luogo geometrico ...
- 48) Considera il triangolo rettangolo OAB, con $O(0, 0)$; $A(a, 0)$; $B(0, b)$,
e verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è uguale a metà dell'ipotenusa stessa.

RISPOSTE

- 41) Area = 48.
Le diagonali si intersecano in (1,8).
- 42) a) Sono distribuiti su due rette, parallele all'asse x , di equazioni $y = 1$ e $y = -1$ rispettivamente.
b) Un semipiano, privato della sua retta origine
c) $x^2 + y^2 > 25$ equivale a $\sqrt{x^2 + y^2} > 5$.
Ma $\sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza di (x, y) dall'origine.
Allora la figura è formata da tutti i punti del piano, tranne quelli del cerchio di centro O e raggio 5.
- 43) E' possibile, sul piano cartesiano, trovare 3 punti A, B, C tali che $AB = 32, BC = 16, AC = 8$?
No, perché in un triangolo ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due ("relazione triangolare"), mentre qui 32 non è $< 16+8$.
Inoltre i tre punti non possono essere allineati, perché in questo caso, fra i segmenti in gioco, ce ne sarebbero due con somma uguale al terzo segmento: ora, ciò coi nostri 3 segmenti non avviene.
E tre punti P, Q, R per cui $PQ = 12, QR = 8, RP = 4$?
Sì. I tre punti saranno allineati, con R compreso fra P e Q .
- 44) Un punto P dell'asse x ha coordinate $P(x, 0)$.
L'angolo \widehat{APB} sarà retto se e solo se $PA^2 + PB^2 = AB^2$.
Si trova che i due punti hanno coordinate $(-2, 0)$ e $(1, 0)$.
- 45) Si considera il generico punto $P(x, y)$ del piano e si traduce in coordinate la condizione $PO = PA$.
Ci si libera dalle radici elevando al quadrato.
Si trova $y = -x + 2$, retta che è l'asse del segmento AB .
- 46)
a) $\sqrt{x^2 + y^2}$
b) $|y|$
c) $|x|$
- 47) Il luogo è ... l'asse y .
Tutti, e soli, i punti dell'asse y , ossia tutti e soli i punti di ascissa nulla ($x = 0$) hanno la proprietà di essere equidistanti dall'origine e dall'asse x .
 $\sqrt{x^2 + y^2} = |y|$; $x^2 + y^2 = |y|^2$ ~~$x^2 + y^2 = y^2$~~ $x^2 = 0$ $x = 0$.
- 48) In effetti, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $OM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$