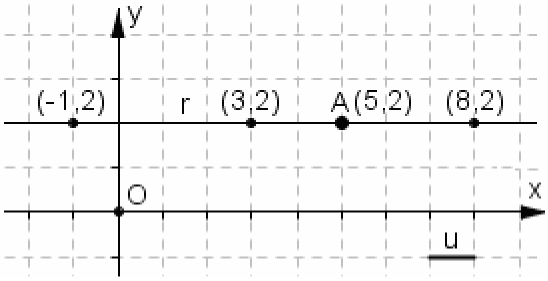
8. L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

❑ Equazione di una parallela all'asse *x*

Qual è l'equazione della retta, parallela all'asse *x*, passante per il punto A(5,2)?



I punti della retta in questione sono
tutti e soli i punti del piano cartesiano,
che godono della proprietà di avere ordinata uguale a 2.

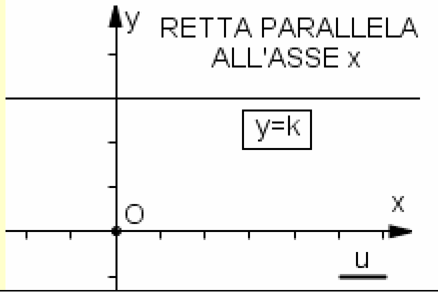
$$\mathrm{P}(x,y)\in r \;\leftrightarrow\; y=2$$

Quindi l'uguaglianza $\boxed{y=2}$
costituisce l'equazione della retta considerata.

In generale:
una $\boxed{\textbf{RETTA PARALLELA ALL'ASSE } x}$
ha equazione

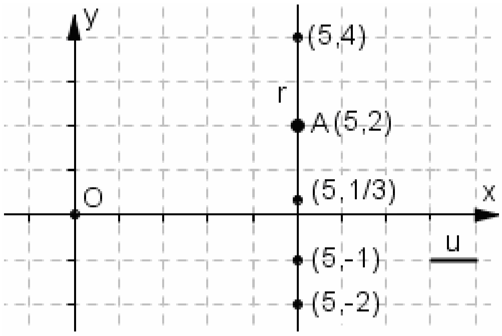
$\boxed{y=k}$,

essendo *k* l'ordinata costante di tutti i suoi punti,
o, se si preferisce,
l'ordinata di uno qualsiasi dei suoi punti.



❑ Equazione di una parallela all'asse *y*

Qual è l'equazione della retta, parallela all'asse *y*, passante per il punto A(5,2)?



I punti della retta in questione sono
tutti e soli i punti del piano cartesiano,
che godono della proprietà di avere ascissa uguale a 5.

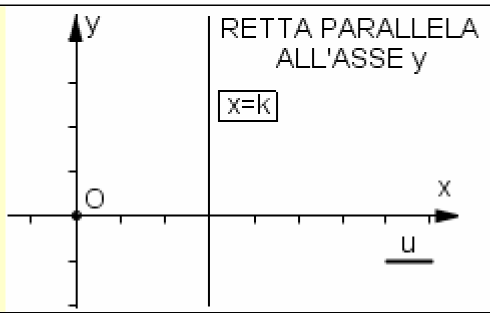
$$\mathrm{P}(x,y)\in r \;\leftrightarrow\; x=5$$

Quindi l'uguaglianza $\boxed{x=5}$
costituisce l'equazione della retta considerata.

In generale:
una $\boxed{\textbf{RETTA PARALLELA ALL'ASSE } y}$
ha equazione

$\boxed{x=k}$,

essendo *k* l'ascissa costante di tutti i suoi punti,
o, se si preferisce,
l'ascissa di uno qualsiasi dei suoi punti.



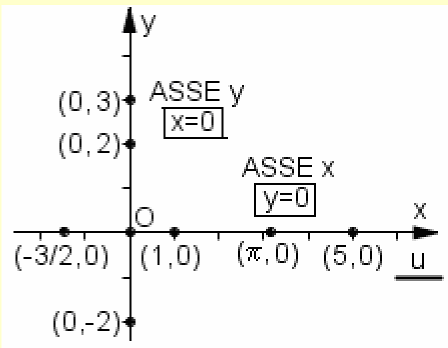
❑ Equazioni degli assi cartesiani

Anche i due assi cartesiani stessi possono essere visti come particolari rette collocate nel piano cartesiano.

L'equazione dell' $\boxed{\textbf{ASSE } x}$ **,**
visto come particolare retta
inserita nel piano cartesiano,
è

$\boxed{y=0}$:

infatti un punto $\mathrm{P}(x,y)$
appartiene all'asse *x*
se e solo se
la sua ordinata *y* è nulla.



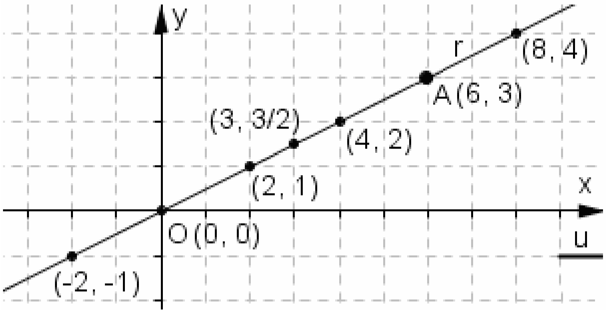
L'equazione dell' $\boxed{\textbf{ASSE } y}$ **,**
visto come particolare retta
inserita nel piano cartesiano,
è

$\boxed{x=0}$:

infatti un punto $\mathrm{P}(x,y)$
appartiene all'asse *y*
se e solo se
la sua ascissa *x* è nulla.

- **Retta passante per l'origine (e non coincidente né con l'asse *x*, né con l'asse *y*)**

Scrivere l'equazione della retta passante per $O(0,0)$ e per $A(6,3)$



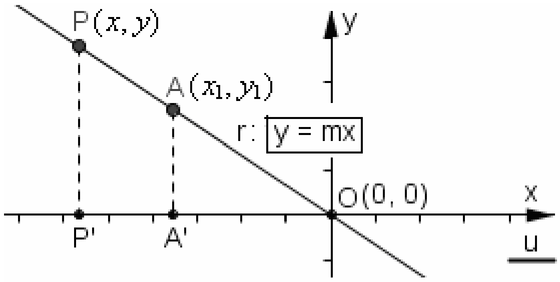
Nella figura, abbiamo segnato le coordinate di alcuni punti della retta in questione.
Si capisce chiaramente che appartengono alla retta considerata tutti e soli i punti $P(x, y)$, la cui ordinata y è la metà dell'ascissa x.

$$P(x, y) \in r \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Pertanto la retta considerata ha equazione $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$.

Generalizzando,
se si va a prendere la retta passante per l'origine e per un altro punto $A(x_1, y_1)$ (con $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$),

si può dimostrare che l'equazione di una tale retta è $\boxed{y = mx}$, avendo posto $\boxed{m = \frac{y_1}{x_1}}$. Infatti:



$P(x, y) \in r \leftrightarrow$
$\leftrightarrow$ PP'O *simile con* AA'O,
e P *situato nello stesso quadrante di* A,
oppure nel quadrante opposto al vertice $\leftrightarrow$
$\leftrightarrow P'P : OP' = A'A : OA' \leftrightarrow$
$\leftrightarrow y : x = y_1 : x_1 \leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \leftrightarrow y = \frac{y_1}{x_1}x \leftrightarrow \boxed{y = mx}$

- Nella proporzione $P'P : OP' = A'A : OA'$ i segmenti in gioco vanno pensati come ORIENTATI e, quindi, le loro misure come RELATIVE:
ad esempio, nella nostra figura, è $P'P > 0,\ OP' < 0,\ A'A > 0,\ OA' < 0$ (e risulta poi $m < 0$).

- A ben guardare, la catena di biimplicazioni ha senso solo pensando il punto $P(x, y)$ distinto dall'origine.
Infatti, in caso contrario, il triangolo PP'O sarebbe ridotto ad un punto,
e comunque ci ritroveremmo con dei segmenti di misura nulla a denominatore.
Ma se consideriamo soltanto l'equazione alla quale siamo pervenuti alla fine, ossia la $y = mx$,
vediamo che essa risulta soddisfatta *anche* dalle coordinate $x = 0,\ y = 0$ dell'origine.

- L'equazione $y = mx$ è stata ricavata supponendo $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$ e quindi anche $m = \frac{y_1}{x_1} \neq 0$.

  Tuttavia, l'equazione dell'asse *x*, che già sappiamo essere $y = 0$, si può, volendo, pensare come ottenibile scrivendo $y = mx$ e poi ponendo $m = 0$.
  Quindi, in definitiva, possiamo concludere che *qualsiasi* retta per l'origine ha equazione della forma $y = mx$, *tranne* la retta verticale per l'origine (ossia l'asse *y*),
  la cui equazione ($x = 0$) NON si può porre sotto la forma $y = mx$.

L'equazione di una retta passante per $O(0,0)$ e per $A(x_1, y_1)$ (e non coincidente con l'asse *y*) è

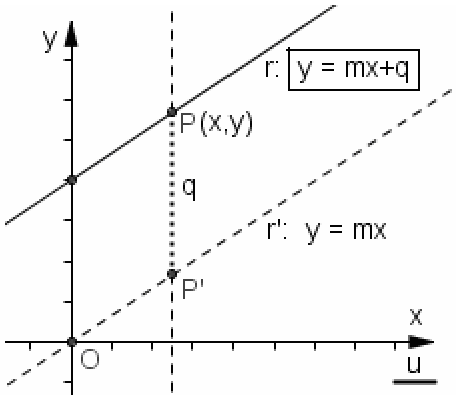
$\boxed{y = mx}$**, avendo posto** $m = \frac{y_1}{x_1}$.

In altre parole, presa una qualsivoglia retta per l'origine (non coincidente con l'asse *y*),
la sua equazione è sempre della forma $y = mx$
dove la costante m è il rapporto fra la *y* e la *x* di un punto qualsiasi (a parte l'origine) della retta stessa.

In $y = mx$, la costante *m* è detta "COEFFICIENTE ANGOLARE" perché caratterizza **l'inclinazione della retta in questione**, ossia **l'angolo che questa forma con l'asse delle *x***. Basti pensare che ponendo $x = 1$ si ottiene $y = m$, quindi alla retta considerata appartiene, in particolare, il punto $(1, m)$.
Perciò
- se $m > 0$ la retta sarà "**in salita**" (ovvio: se supponiamo, come solitamente è, che l'asse *x* sia orizzontale!)
- se $m < 0$ sarà "**in discesa**"
- e **quanto più grande è il valore assoluto di *m*, tanto più l'inclinazione della retta sarà accentuata**.

Nel caso $m = 0$, l'equazione diventa $y = 0$ (asse *x*, inclinazione "**orizzontale**").

❑ Retta (non parallela all'asse *y*) in posizione generica



Data una retta r non parallela all'asse *y*, consideriamo la retta ausiliaria r', parallela ad r e passante per O.

Poiché la retta r' passa per l'origine, la sua equazione sarà della forma $y = mx$, con m costante opportuna.

Se ora consideriamo una coppia di punti $P \in r$ e $P' \in r'$, situati su di una stessa parallela all'asse *y*, possiamo osservare che la misura del segmento orientato P'P si mantiene, al variare di P, costante: la indicheremo con *q*.

I punti di r sono perciò tutti e soli quei punti del piano cartesiano, che si possono ottenere a partire da un punto di r', lasciandone inalterata l'ascissa ma incrementando (algebricamente) l'ordinata della costante *q*.

Ciò significa che, mentre il punto di ascissa *x* della retta r' ha ordinata mx, il punto di ascissa *x* della retta *r* ha ordinata

$$mx+q.$$

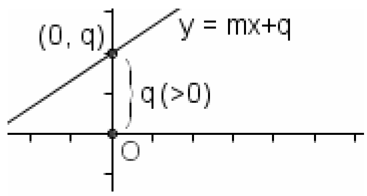
Perciò l'uguaglianza che è verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti che appartengono alla retta *r*, è l'uguaglianza

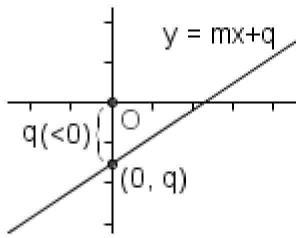
$$y = mx+q$$

Concludendo,
l'equazione di una retta in posizione generica
(con esclusione però delle rette parallele all'asse *y*) è
$\boxed{y = mx+q}$ **, essendo *m*, *q* due costanti opportune**.

SIGNIFICATO DI q nell'equazione $y = mx+q$

Nell'equazione $y = mx+q$, se si pone $x = 0$, si ottiene $y = q$;
quindi la retta $y = mx+q$ passa per il punto $(0,\ q)$.
Ciò comporta che data la retta di equazione $y = mx+q$,
q rappresenta l'ordinata del punto di quella retta, avente ascissa 0;
in altre parole, q è l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse delle *y*.
La costante *q* viene perciò detta "**ordinata all'origine**":
modo conciso per affermare che *q* è l'ordinata di quel punto della retta che sta sopra (se $q > 0$) o sotto (se $q < 0$) l'origine. Naturalmente, se $q = 0$ ritroviamo come caso particolare la retta passante per l'origine.

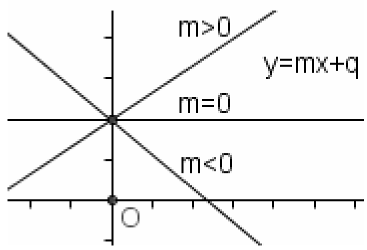


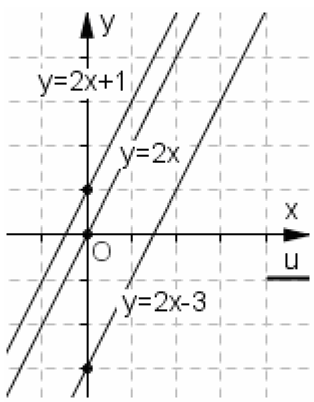


SIGNIFICATO DI m nell'equazione $y = mx+q$

La costante *m*, che come abbiamo visto è il coefficiente angolare della retta r' passante per l'origine e parallela alla nostra retta $r:\ y = mx+q$,
viene ancora detta "**coefficiente angolare**" e conserva lo stesso significato che aveva in relazione ad una retta $y = mx$ passante per O:
individua dunque l'inclinazione della retta, con le solite corrispondenze:

- $m > 0 \rightarrow$ retta "in salita";
- $m < 0 \rightarrow$ retta "in discesa";
- $m = 0 \rightarrow$ retta "orizzontale" (voglio dire, parallela all'asse *x*);
- $|m|$ grande $\rightarrow$ inclinazione (salita o discesa) ripida.





←
Quindi rette fra loro **parallele** hanno **ugual valore di *m*** (figura qui a sinistra) …

→
… e **rette che intersecano l'asse *y* nel medesimo punto hanno ugual valore di *q*** (figura qui a destra).