9. RETTE ED EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

CASO GENERALE E CASI PARTICOLARI

Un'equazione della forma $y = mx$ si può pensare come caso particolare di $y = mx + q$ (con $q = 0$).

E d'altronde, anche il caso $y = k = costante$ (retta parallela all'asse x)
può essere visto come caso particolare di $y = mx + q$ (con $m = 0$).

In definitiva, possiamo dire che
qualunque retta non parallela all'asse *y*
(passante o non passante per l'origine; parallela o non parallela all'asse *x*)
ha sempre un'equazione della forma $y = mx + q$.

Le sole rette che non sono rappresentabili con $y = mx + q$ sono quelle parallele all'asse y:
le equazioni di tali rette si contraddistinguono infatti per la forma $x = k$,
che non si può evidentemente ricondurre a $y = mx + q$.

Ma – ci chiediamo – sarà possibile dire che pure due equazioni della forma

$$y = mx + q$$

e

$$x = k$$

hanno qualcosa che le accomuna?

La risposta è affermativa: sono entrambe equazioni "di 1° grado"
(osserviamo che *m*, come d'altronde *q* e *k*, è un simbolo utilizzato per indicare una costante numerica, quindi "non fa grado", non contribuisce al grado).

Approfondiamo questo aspetto.
Se portiamo tutti i termini dalla stessa parte dell' "=", le due equazioni diventeranno rispettivamente

$$mx - y + q = 0$$

e

$$x - k = 0$$

dal che si vede che sono entrambe della forma

$$ax + by + c = 0$$

(polinomio di 1° grado nelle variabili x, y, uguagliato a 0).

Cosa possiamo dunque dire a questo punto?
Possiamo dire che

> **l'equazione di una qualsiasi retta nel piano cartesiano**
> **può essere sempre portata sotto la forma**
> $$ax + by + c = 0$$
> **(polinomio di 1° grado – si dice anche: "lineare" – nelle variabili *x*, *y*, uguagliato a 0).**

Il bello è che

> **VALE ANCHE IL VICEVERSA,**
> **cioè è vero pure che**
> **qualunque equazione della forma $ax + by + c = 0$ avrà, come grafico corrispondente, una retta!**

Vediamolo per bene.
Prendiamo una qualsivoglia equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

- Prima di tutto, osserviamo che, se a e b fossero entrambi nulli, l'equazione si ridurrebbe a
  $$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$
  e allora
  - ♪ nel caso fosse anche $c = 0$, sarebbe verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di *qualsiasi* punto del piano
    (in pratica, il luogo geometrico corrispondente sarebbe … tutto il piano!)
  - ♫ nel caso invece fosse $c \neq 0$, non sarebbe verificata dalla coppia (x, y) delle coordinate di *nessun* punto del piano
    (in pratica, il luogo geometrico corrispondente sarebbe … il luogo vuoto!)

  Possiamo perciò escludere il caso $a = b = 0$ dalla nostra attenzione, come troppo anomalo.

- Se ora nell'equazione considerata è $a=0$ (e $b \neq 0$) allora la nostra equazione si potrà scrivere come

$$by+c=0; \quad by=-c; \quad y=-\frac{c}{b}$$

e rappresenterà il luogo dei punti la cui ordinata è uguale a *quel* valore fissato
(l'equazione non pone invece alcun vincolo all'ascissa),
luogo che evidentemente consiste in una **retta** parallela all'asse *x*.

- Se nell'equazione considerata è $b=0$ (e $a \neq 0$) allora la nostra equazione si potrà scrivere come

$$ax+c=0; \quad ax=-c; \quad x=-\frac{c}{a}$$

e rappresenterà il luogo dei punti la cui ascissa è uguale a *quel* valore fissato
(l'equazione non pone invece vincoli all'ordinata),
luogo che evidentemente consiste in una **retta** parallela all'asse *y*.

- Supponiamo infine che sia $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.
Allora a partire da $ax+by+c=0$ possiamo fare i seguenti passaggi:

$$by=-ax-c; \quad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

Ora, questa equazione è della forma $y=mx+q$, con $m=-\frac{a}{b}$, $q=-\frac{c}{b}$;
noi precedentemente abbiamo fatto vedere che ogni retta non parallela all'asse *y*
ha un'equazione di quella forma, ma … attenzione … ciò non equivale ad aver dimostrato anche
il *viceversa*, ossia che *qualsiasi* equazione della forma $y=mx+q$ rappresenti *sempre* una retta!

Insomma, resta aperta la questione:
"ma se io, anziché partire da una data retta per scriverne poi l'equazione,
scelgo a mio arbitrio due numeri *m* e *q*, e poi scrivo l'equazione $y=mx+q$,
posso essere sicuro che il grafico corrispondente sarà sempre una retta?
Oppure ci saranno dei valori, per la coppia di parametri *m*, *q*,
tali che il grafico associato all'equazione $y=mx+q$ non sia una retta"?

Un semplice ragionamento di tipo "dinamico" sarà sufficiente a sciogliere il dubbio.
Fissiamo a nostro arbitrio i valori di *m* e di *q*.
Per aiutarti a meglio fissare le idee, farò ora un caso particolare,
ma la possibilità di generalizzare ti apparirà alla fine del tutto evidente: prenderò $m=1000$, $q=-71$.
Posso esser certo che l'equazione $y=1000x-71$ ha come grafico una retta?
Sì, perché con l'immaginazione io potrei, ad es., partire da una qualunque retta passante per l'origine,
poi cambiarne l'inclinazione in modo tale che, qualora se ne scrivesse l'equazione, il suo coeff. angolare
venga ad essere esattamente 1000 (siccome il coeff. ang. *m* di una retta per O coincide, come si è visto,
con l'ordinata del punto di ascissa 1, mi basterà far sì che la retta per O attraversi il punto $(1,1000)$)
e infine abbassarla, sempre conservando l'inclinazione stabilita, fino a che l'ordinata all'origine
diventi uguale a -71.
La particolare retta cui sarò pervenuto in questo modo, avrà come equazione proprio $y=1000x-71$;
quindi, a posteriori, posso dire che l'equazione $y=1000x-71$ ha come grafico una retta.

Riassumiamo e perfezioniamo.

Ogni RETTA ha un'equazione che è "DI PRIMO GRADO in *x, y*",
ossia un'equazione che è esprimibile sotto la forma $ax+by+c=0$;

e VICEVERSA, ogni equazione "DI PRIMO GRADO in *x, y*",
ossia esprimibile sotto la forma $ax+by+c=0$, ha come grafico una RETTA.

Questo è il motivo per cui in matematica
anziché dire "DI 1° GRADO" si può dire anche "LINEARE".
Osserviamo che in un'equazione lineare $ax+by+c=0$ i coefficienti *a, b, c*
SONO DETERMINATI "A MENO DI UNA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ",
nel senso che, se anche li si moltiplicasse tutti e tre per uno stesso numero reale non nullo,
l'equazione sostanzialmente non cambierebbe, perché sarebbe verificata sempre dalle
stesse coppie (x, y) di prima, quindi la retta corrispondente sarebbe esattamente la stessa.

Ad esempio, le diverse equazioni

$$2x-6y+5=0; \quad 4x-12y+10=0; \quad 6x-18y+15=0; \quad x-3y+\frac{5}{2}=0; \quad 2x\sqrt{7}-6y\sqrt{7}+5\sqrt{7}=0; \ \ldots$$

rappresentano TUTTE LA MEDESIMA RETTA.