

## 11. APPROFONDIMENTI SUL COEFFICIENTE ANGOLARE

### BISETTRICI DEI QUADRANTI E RETTE INCLINATE DI 45°

- ♥ **La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione  $y = x$**

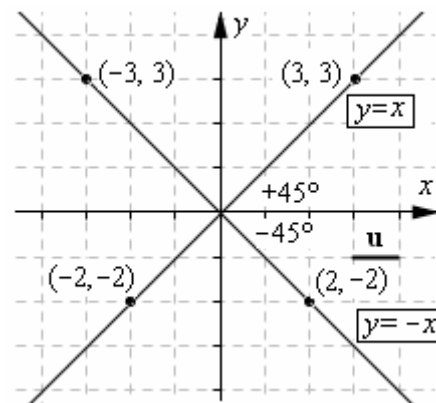
(è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'ascissa).

Quindi il coefficiente angolare  $m = 1$  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di **45° in salita** ( $+45^\circ$ ).

- ♥ **La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione  $y = -x$**

(è il luogo dei punti del piano cartesiano la cui ordinata è uguale all'opposto dell'ascissa).

Quindi il coefficiente angolare  $m = -1$  contraddistingue le rette che, rispetto all'asse orizzontale, sono inclinate di **45° in discesa** ( $-45^\circ$ ).



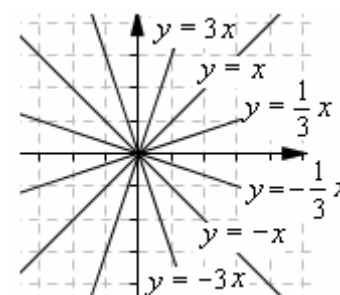
Le bisettrici dei quadranti

### RETTE CON INCLINAZIONE MAGGIORE, O MINORE, DI 45°

- Una retta, con inclinazione (in salita o in discesa)  $> 45^\circ$ , ha  $|m| > 1$ ; una retta, con inclinazione (in salita o in discesa)  $< 45^\circ$ , ha  $0 \leq |m| < 1$

- Due rette, che siano ugualmente inclinate, ma una in salita e l'altra in discesa, hanno coefficienti angolari fra loro **OPPOSTI**.

- ♥ **Si può dimostrare che due rette PERPENDICOLARI hanno coefficienti angolari fra loro ANTIRECIPROCI (si dice "antireciproco" l'opposto del reciproco).**



### LA PROPRIETA' FONDAMENTALE DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Prendi una retta qualsiasi: che so, la  $y = 2x + 3$ .

Adesso, assegna a  $x$  due valori, per calcolare i corrispondenti valori di  $y$  e determinare dunque due punti della retta stessa.

Ad esempio,

- puoi porre  $x = 1$ , e avrai quindi  $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$  e di conseguenza un primo punto  $A(1, 5)$ ;
- poi puoi porre  $x = 4$ , e avrai quindi  $y = 2 \cdot 4 + 3 = 11$  da cui un secondo punto  $B(4, 11)$ .

Ora vai a calcolare il rapporto (= quoziente) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti ottenuti:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 5}{4 - 1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

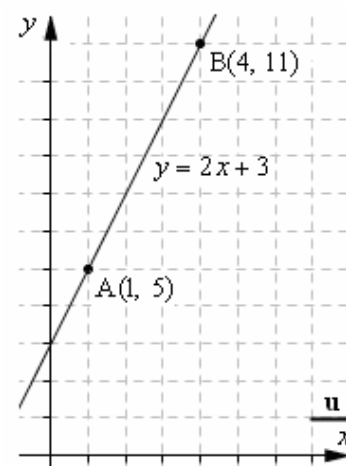
Come hai potuto vedere, il risultato di questo calcolo coincide col coefficiente angolare  $m$  della retta.

Prova con un'altra coppia di punti, fai nuovamente il calcolo: otterrai ancora lo stesso valore, il valore del coefficiente angolare.

Prendi un'altra retta, considera una coppia di suoi punti: vedrai che il calcolo

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

darà sempre il coefficiente angolare  $m$  di quella retta.



Ecco una retta  $y = 2x + 3$ , e due suoi punti  $A(1, 5)$ ;  $B(4, 11)$ .

Calcoliamo  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ;

avremo  $\frac{11 - 5}{4 - 1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$ .

Ma 2 è il coeff. angolare!!!

Vale dunque (ne diamo la dimostrazione generale alla pag. seguente) la **formula**

$$\heartsuit \quad \boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m} \quad (\text{importantissima!})$$

**Data una retta di equazione  $y = mx + q$ , il suo coefficiente angolare  $m$  è uguale al rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualsiasi della retta stessa.**

**NOTA - Il simbolo  $\Delta$  è sovente utilizzato, in matematica, per indicare “differenza”.**

Ad es., fra due persone che hanno risp. 15 anni e 47 anni, c'è una differenza di età  $\Delta e = 47 - 15 = 32$ .  
Presi, in Fisica, due istanti di tempo successivi  $t_1$  e  $t_2$ , nei quali la velocità di un corpo è risp.  $v_1$  e  $v_2$ , allora nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  l'incremento di velocità ( $>$ ,  $<$  o  $= 0$ ) è dato da  $\Delta v = v_2 - v_1$ .

Dimostrazione Consideriamo una retta non verticale  $r$ :

$$y = mx + q$$

e prendiamo su di essa due punti qualsiasi

$$A(x_1, y_1) \text{ e } B(x_2, y_2).$$

Poiché i due punti sono stati presi sulla retta  $r$ , risulterà

$$y_1 = mx_1 + q \text{ e } y_2 = mx_2 + q.$$

Insomma, le coordinate dei due punti in questione saranno

$$(x_1, mx_1 + q) \text{ e } (x_2, mx_2 + q).$$

Ora si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + q) - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 \cancel{+q} - mx_1 \cancel{+q}}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}} = m$$

C.V.D.

E' utile ed importante osservare (vedi figura) che

♥ **le due quantità  $\Delta x$  e  $\Delta y$  corrispondono alle due misure (con segno) dei due segmenti orizzontale ( $\Delta x$ ) e verticale ( $\Delta y$ ) che occorre percorrere per passare dal primo punto al secondo**

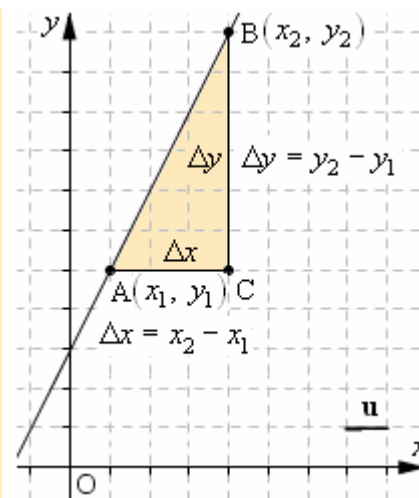
... **misure CON SEGNO**, nel senso che

il segmento orizzontale andrà preso col segno

- positivo se viene percorso da sinistra verso destra,
  - negativo se viene percorso da destra verso sinistra;
- e allo stesso modo

il segmento verticale andrà preso col segno

- positivo se viene percorso dal basso verso l'alto,
- negativo se viene percorso dall'alto verso il basso.



Quanto sopra ci dice che in una funzione “lineare”,  
ossia della forma

$$y = mx + q$$

l'incremento di  $x$  è proporzionale all'incremento corrispondente di  $y$ :  
il rapporto fra questi due incrementi è costante.

Si può dimostrare che VALE ANCHE IL VICEVERSA:

se due grandezze  $x$ ,  $y$  sono legate fra loro in modo tale  
che l'incremento di  $x$  è proporzionale all'incremento corrispondente di  $y$   
(se raddoppia uno, raddoppia anche l'altro ... )  
allora la relazione tra le due grandezze

è della forma

$$y = mx + q.$$

Segnaliamo infine che molti testi chiamano “**AFFINE**”

una funzione della forma  $y = ax + b$ ,

riservando il termine “**LINEARE**”

solo, o prevalentemente, al caso in cui  $b = 0$  ( $y = ax$ ).

**ENGLISH**

- coefficiente angolare = **slope** (lett.: *pendenza*), o **gradient**
- ordinata all'origine = **y-intercept**
- $\Delta y / \Delta x =$  “**rise over run**” = spostamento *verticale* fratto spostamento *laterale*

## DISEGNARE UNA RETTA CONOSCENDONE UN PUNTO E IL COEFFICIENTE ANGOLARE

Se noi sappiamo che una retta passa per un dato punto  $P_0$ ,  
e conosciamo il coefficiente angolare  $m$  di quella retta,  
potremo disegnare la retta con precisione  
anche senza aver determinato la costante  $q$  dell'equazione  $y = mx + q$ .

Infatti, poiché sappiamo che per il coefficiente angolare vale la formula  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ,

ci basterà fare il disegno in modo che la retta passi per  $P_0$   
e per un altro punto  $P_1$  per ottenere il quale partiremo da  $P_0$  e ci sposteremo

- ♪ prima orizzontalmente di un segmento orientato  $\Delta x$
- ♪ poi verticalmente di un altro segmento orientato  $\Delta y$ ,

dopo aver scelto  $\Delta x$  e  $\Delta y$  in modo tale che il loro quoziente sia uguale a quel valore  $m$  che ci interessa.

- Ad esempio (figura 1), per disegnare la retta passante per  $P_0(3, 3)$  e avente coefficiente angolare  $m = 2$ , possiamo partire da  $P_0$  e poi spostarci di 1 verso destra ( $\Delta x = 1$ ) e di 2 verso l'alto ( $\Delta y = 2$ ). Troveremo così il nuovo punto  $P_1$ , tale che la retta  $P_0P_1$  avrà  $m = \Delta y / \Delta x = 2$  e sarà perciò la retta desiderata.
- Facciamo un altro esempio (fig. 2). Per disegnare la retta passante per  $A(1, 5)$  e di coeff. ang.  $m = -3/4$ , possiamo partire da  $A$  e spostarci di 4 verso destra ( $\Delta x = 4$ ) poi di 3 verso il basso ( $\Delta y = -3$ ). Raggiungeremo così un nuovo punto  $B$  e congiungendo  $A$  con  $B$  il gioco sarà fatto.

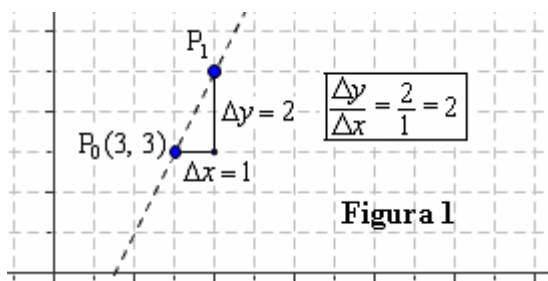


Figura 1

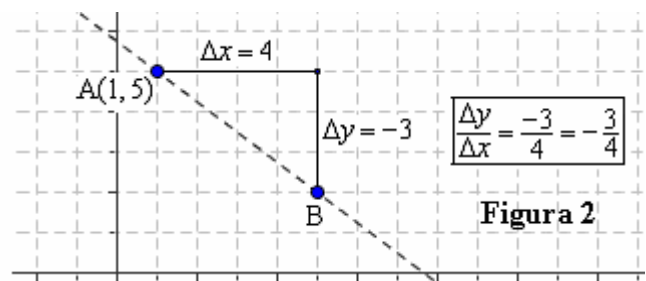


Figura 2

## SIGNIFICATO GONIOMETRICO DEL COEFFICIENTE ANGOLARE

Questa osservazione può essere compresa  
solo da chi possiede  
qualche nozione di trigonometria.

Indichiamo con  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 180^\circ$ )  
l'angolo che la nostra retta  
forma con l'asse orientato delle ascisse.  
La trigonometria ci insegna che

$$\frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} \widehat{BAC}$$

e allora in definitiva, tenendo conto che  $\widehat{BAC} = \alpha$   
(angoli corrispondenti formati da due parallele con trasversale),  
avremo

$$m = \frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$$

Insomma,

**il coefficiente angolare di una retta è uguale  
alla tangente goniometrica dell'angolo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 180^\circ$ )  
che la retta stessa forma con l'asse orientato delle  $x$ .**

Nella figura qui a fianco l'angolo in questione è acuto,  
ma puoi tu stesso controllare  
che **la relazione vale, compreso il segno,  
anche nel caso l'angolo sia ottuso  
(e pure per l'angolo nullo a cui è possibile pensare  
nel caso di una retta parallela all'asse  $x$ ).**

