13. CONDIZIONI DI PARALLELISMO E PERPENDICOLARITA’

CONDIZIONE DI PARALLELISMO FRA DUE RETTE (NON VERTICALI)
Due rette non verticali $r: y = mx + q$; $r': y = m'x + q'$ sono PARALLELE se e solo se hanno UGUAL COEFFICIENTE ANGOLARE: $\boxed{r // r' \leftrightarrow m = m'}$, come ad es. $r: y = 4x - 7$ ed $s: y = 4x + 2$

Ciò si deve al fatto che, come abbiamo ripetutamente osservato,
il coefficiente angolare di una retta esprime la sua inclinazione rispetto all’asse x;
ora, è evidente che il parallelismo fra due rette si avrà se e solo se le due rette
saranno ugualmente inclinate rispetto all’asse x e quindi se e solo se
(nel caso di rette non verticali) avranno ugual coefficiente angolare.

La biimplicazione $r // r' \leftrightarrow m = m'$ potrebbe anche essere dimostrata nel modo seguente:
$r: y = mx + q$ e $r': y = m'x + q'$ sono parallele se e solo se, cercandone le intersezioni tramite il sistema
$\begin{cases} y = mx + q \\ y' = m'x + q' \end{cases}$, non se ne trova nessuna oppure se ne trovano infinite
(caso, quest’ultimo, in cui le rette sarebbero coincidenti, quindi “parallele in senso esteso”).
Perciò si avrà $r // r'$ se e solo se il sistema risulterà impossibile, oppure indeterminato.
Ma l’equazione risolvente del sistema è $mx + q = m'x + q'$; $(m - m')x = q' - q$
e i casi di impossibilità o indeterminazione si hanno quando si annulla il coefficiente di x, ossia con $m = m'$.

CONDIZIONE DI PARALLELISMO FRA DUE RETTE QUALSIASI (FORMA IMPLICITA!)
La condizione di parallelismo esaminata precedentemente non può riguardare due rette parallele che siano entrambe verticali (per le rette verticali il coefficiente angolare non è definito!).
Tuttavia, se si considerano le equazioni di due rette in forma implicita, è possibile scrivere una condizione di parallelismo valida universalmente, anche per le rette verticali.
Si potrebbe dimostrare che, per le due rette $r: ax + by + c = 0$; $r': a'x + b'y + c' = 0$, essa è

$$\boxed{r // r' \leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0}$$

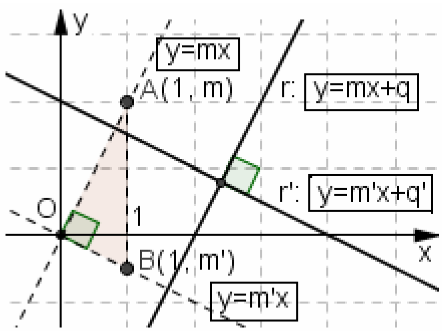
Ad esempio, $r: 6x - 10y + 7 = 0$ ed $s: 9x - 15y + 22 = 0$
sono parallele $(r \parallel s)$ perché $\begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 9 & -15 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-15) - (-10) \cdot 9 = -90 + 90 = 0$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA’ FRA DUE RETTE (NON PARALLELE AGLI ASSI)
Due rette non parallele agli assi $r: y = mx + q$; $r': y = m'x + q'$
sono PERPENDICOLARI se e solo se HANNO I COEFFICIENTI ANGOLARI ANTIRECIPROCI:

$$\boxed{r \perp r' \leftrightarrow m' = -\frac{1}{m} \quad (anche: \ mm' = -1)}$$

Ad esempio, $r: y = \frac{5}{3}x$ ed $s: y = -\frac{3}{5}x + 2$
sono perpendicolari $(r \perp s)$.

Con riferimento alla figura:
in luogo delle due rette $y = mx + q$, $y = m'x + q'$
possiamo considerare le rispettive parallele per l’origine,
ossia le rette tratteggiate $y = mx$ e $y = m'x$.
Infatti è evidente che le due rette considerate inizialmente sono
perpendicolari se e solo se risultano perpendicolari queste ultime.



Consideriamo allora i due punti, rispettivamente della
$y = mx$ e della $y = m'x$, di ascissa 1: $A(1, m)$ e $B(1, m')$.
$\boxed{\text{AOB } rettangolo \text{ in O}} \leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow |m - m'|^2 = \left(\sqrt{1 + m^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + m'^2}\right)^2 \leftrightarrow m^2 - 2mm' + m'^2 = 1 + m^2 + 1 + m'^2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow -2mm' = 2 \leftrightarrow mm' = -1 \leftrightarrow \boxed{m' = -1/m} \quad \text{C.V.D.}$$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA’ FRA DUE RETTE QUALSIASI (FORMA IMPLICITA!)
Per fissare una condizione di perpendicolarità che non escluda le rette parallele agli assi, siamo costretti ancora una volta a ricorrere alle equazioni in forma implicita.
Si potrebbe dimostrare che, per le due rette $r: ax + by + c = 0$; $r': a'x + b'y + c' = 0$, la condizione è

$$\boxed{r \perp r' \leftrightarrow aa' + bb' = 0}$$

Ad esempio, $r: 4x + 3y + 9 = 0$ ed $s: 6x - 8y + 1 = 0$
sono perpendicolari $(r \perp s)$ perché $4 \cdot 6 + 3 \cdot (-8) = 24 - 24 = 0$

ESEMPI - ESERCIZI

1) Data la retta $y=-\frac{2}{3}x$, riconosci quali fra le seguenti rette sono ad essa I) parallele II) perpendicolari

a) $y=\frac{2}{3}x+1$ b) $y=\frac{3}{2}x-1$ c) $y=1-\frac{2}{3}x$ d) $4x+6y+30=0$ e) $3x+2y+6=0$

2) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette parallele alla retta che passa per la coppia di punti:

a) $\mathrm{A}(1,-3);\ \mathrm{B}(3,2)$ b) $\mathrm{C}\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right);\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ c) $\mathrm{E}(5,4);\ \mathrm{F}(5,-2)$ d) $\mathrm{H}(0,h);\ \mathrm{K}(k,0)\ (h,k\neq 0)$

3) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette perpendicolari alla retta che passa per ciascuna delle quattro coppie di punti a), b), c), d) dell'esercizio precedente

4) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo. Ripeti poi la stessa verifica utilizzando, invece, la formula per la distanza fra due punti.

a) $\mathrm{A}(-4,1);\ \mathrm{B}(0,-2);\ \mathrm{C}(3,0);\ \mathrm{D}(-1,3)$ b) $\mathrm{A}(-1,-1);\ \mathrm{B}\left(3,-\frac{8}{3}\right);\ \mathrm{C}\left(3,\frac{4}{3}\right);\ \mathrm{D}(-1,3)$

5) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il triangolo ABC è rettangolo. Ripeti poi la stessa verifica utilizzando, invece, la relazione pitagorica. Calcola anche la mediana relativa all'ipotenusa, constatando che è uguale a metà dell'ipotenusa stessa.

a) $\mathrm{A}(-10,-8);\ \mathrm{B}(2,8);\ \mathrm{C}(14,-1)$ b) $\mathrm{D}(-1,0);\ \mathrm{E}(4,-12);\ \mathrm{F}\left(8,\frac{15}{4}\right)$

6) Considera il triangolo di vertici $\mathrm{A}(-8,-3);\ \mathrm{B}(0,12);\ \mathrm{C}(0,3)$ e verifica (nei tre possibili casi) che la congiungente i punti medi di due lati qualsiasi è sempre parallela al lato rimanente, e uguale alla sua metà.

7) Considera le due rette di equazioni:

$r: y=(k+1)x+(k-1);\quad s: y=4x+1.$

Per quale valore del parametro k sono parallele? Per quale sono perpendicolari? Scrivi anche le equazioni delle rette così trovate, verificando così la correttezza delle tue risposte.

8) Stesso quesito precedente, per le coppie di rette

a) $r: y=(p+1)x;\quad s: y=(p-1)x$ b) $r: y=ax+b;\quad s: y=-ax+c$

9) Considera le due rette di equazioni: $r: 3x+4y+5=0;\quad s: kx-2y+3=0$ dove k è un parametro, e, senza portare in forma esplicita, stabilisci per quali valori di k esse sono:

I) parallele II) perpendicolari.

10) Stesso quesito precedente, per la coppia di rette

$r: hx+(h-1)y+(h+2)=0;\quad s:(h-1)x+(h+2)y+(h-3)=0$

Scrivi anche le equazioni delle rette così trovate, verificando così la correttezza dei valori di h individuati.

RISPOSTE

1) a) *né* $\parallel$ *nè* $\perp$ b) $\perp$ c) $\parallel$ d) $\parallel$ e) *né* $\parallel$ *nè* $\perp$

2) a) $m=\frac{5}{2}$ b) $m=-2$ c) $m=$ "*non esistente*", "*non definito*", "*infinito*" (*retta verticale*) d) $m=-\frac{h}{k}$

3) a) $m=-\frac{2}{5}$ b) $m=\frac{1}{2}$ c) $m=0$ d) $m=\frac{k}{h}$

4) a) $m_{\mathrm{AB}}=-\frac{3}{4}=m_{\mathrm{DC}}$ *perciò* $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{DC}$; $m_{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}=m_{\mathrm{BC}}$ *perciò* $\mathrm{AD}\parallel\mathrm{BC}$

Invece con le distanze: $\mathrm{AB}=5=\mathrm{DC};\quad \mathrm{AD}=\sqrt{13}=\mathrm{BC}$

e un quadrilatero coi lati opposti a due a due uguali è un parallelogrammo.

b) $m_{\mathrm{AB}}=-\frac{5}{12}=m_{\mathrm{DC}}$ *perciò* $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{DC}$; $m_{\mathrm{AD}}=\infty=m_{\mathrm{BC}}$ *perciò* $\mathrm{AD}\parallel\mathrm{BC}$ (*entrambe verticali*)

Invece con le distanze: $\mathrm{AB}=\frac{13}{3}=\mathrm{DC};\quad \mathrm{AD}=4=\mathrm{BC}$

5) a) $m_{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3}$ *e* $m_{\mathrm{BC}}=-\frac{3}{4}$ *perciò* $\mathrm{AB}\perp\mathrm{BC}\left(\mathrm{A\hat{B}C}=90°\right)$

Invece con la relazione pitagorica:

$\mathrm{AB}=20,\ \mathrm{BC}=15,\ \mathrm{AC}=25$ *quindi* $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=400+225=625=\mathrm{AC}^2$ *da cui* $\mathrm{A\hat{B}C}=90°$

b) $m_{\mathrm{DE}}=-\frac{12}{5}$ *e* $m_{\mathrm{DF}}=\frac{5}{12}$ *perciò* $\mathrm{DE}\perp\mathrm{DF}\left(\mathrm{E\hat{D}F}=90°\right)$

Invece con la relazione pitagorica:

$\mathrm{DE}=13,\ \mathrm{DF}=\frac{39}{4},\ \mathrm{EF}=\frac{65}{4}$ *quindi* $\mathrm{DE}^2+\mathrm{DF}^2=169+\frac{1521}{16}=\frac{4225}{16}=\mathrm{EF}^2$ *da cui* $\mathrm{E\hat{D}F}=90°$

6) *Ad esempio, i punti medi di AB e BC hanno coordinate* $\left(-4,\ \frac{9}{2}\right)$ *e* $\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

e la loro congiungente ha coefficiente angolare, come retta, $\frac{3}{4}$, *e misura, come segmento,* 5;

ora, AC ha coefficiente angolare, come retta, ancora $\frac{3}{4}$ *e misura, come segmento,* 10 *cioè* $5\cdot 2$.

A te le altre verifiche.

7) *Sono* $\parallel$ *se* $m=m'$ *ossia* $k+1=4;\ k=3$. *In tal caso si tratta delle rette* $y=4x+2$ *e* $y=4x+1$.

Sono $\perp$ *se* $m=-\frac{1}{m'}$ *ossia* $k+1=-\frac{1}{4};\ k=-\frac{5}{4}$. *In tal caso le rette sono* $y=-\frac{1}{4}x-\frac{9}{4}$ *e* $y=4x+1$.

8) *a*) $\parallel$ *se* $p+1=p-1$ ... *impossibile!*; $\perp$ *se* $p+1=-\frac{1}{p-1};\ p^2-1=-1;\ p^2=0;\ p=0$

Perciò non si può avere parallelismo per nessun valore di p,
mentre il caso di perpendicolarità corrisponde alle rette $y=x,\ y=-x$

b) $\parallel$ *se* $a=-a;\ a=0$; $\perp$ *se* $a=-\frac{1}{-a};\ a^2=1;\ a=\pm1$

Con $a=0$ *le due rette sono entrambe orizzontali, quindi parallele*;
con $a=1$ *si tratta delle rette* $y=x+b,\ y=-x+c$, *in effetti perpendicolari*,
con $a=-1$ *le due rette sono* $y=-x+b,\ y=x+c$, *in effetti perpendicolari*.

9) *Condizione di parallelismo in forma implicita per due rette* $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$:

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0.$

Dunque: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & -2 \end{vmatrix}=0;\ -6-4k=0;\ k=-\frac{3}{2}$

Condizione di perpendicolarità: $aa'+bb'=0$.

Dunque: $3k-8=0,\ k=\frac{8}{3}$

10) *Parallelismo*: $\begin{vmatrix} h & h-1 \\ h-1 & h+2 \end{vmatrix}=0;\ h(h+2)-(h-1)^2=0;\ ...\ h=\frac{1}{4}$

Con $h=\frac{1}{4}$, *le rette risultano essere rispettivamente*

$\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{9}{4}=0;\ x-3y+9=0;\ y=\frac{1}{3}x+3$

$-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}y-\frac{11}{4}=0;\ -3x+9y-11=0;\ y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{9}$

in effetti parallele $\left(m_1=m_2=\frac{1}{3}\right)$

Perpendicolarità: $h(h-1)+(h-1)(h+2)=0.\ h^2=1,\ h=\pm1$

Con $h=1$, *le rette risultano essere rispettivamente*

$x+3=0;\ x=-3$ *e* $3y-2=0;\ y=\frac{2}{3}$ *in effetti perpendicolari* (*una verticale, l'altra orizzontale*)

Con $h=-1$, *le rette risultano essere rispettivamente*

$-x-2y+1=0;\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ *e* $-2x+y-4=0;\ y=2x+4$ *in effetti perpendicolari*.