14. EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI: LA FORMULA

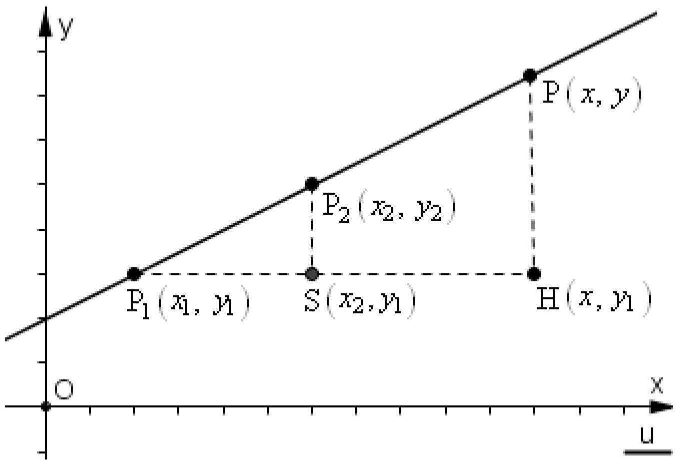
Vogliamo una formula che ci consenta di scrivere immediatamente l'equazione della retta passante per due punti, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, di coordinate assegnate.
Impostiamo la seguente catena di biimplicazioni (ovviamente, i segmenti tratteggiati in figura sono paralleli agli assi cartesiani; i segmenti della proporzione vanno pensati orientati):

$P(x, y) \in P_1P_2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow HP:SP_2 = P_1H:P_1S$ (*segmenti orientati*) $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow (y - y_1):(y_2 - y_1) = (x - x_1):(x_2 - x_1) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$



LA FORMULA CHE DA' LA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI è dunque

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Essa però vale solo per rette che non siano né orizzontali (= stessa ordinata) né verticali (= stessa ascissa).
In tal caso, infatti, provando ad applicarla si otterrebbe un denominatore nullo.
D'altra parte, se è noto che i due punti in gioco individuano una retta parallela a uno degli assi, scrivere l'equazione della retta stessa è immediato.

Osserviamo che, eliminando i denominatori nella formula di cui sopra, si ottiene la sua VARIANTE

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)}$$

la quale, invece, HA IL VANTAGGIO DI VALERE *SEMPRE*, anche per le rette parallele agli assi.

ESEMPI

- **Scrivere l'equazione della retta che passa per i due punti $A(-6, 7)$; $B(2, 3)$**

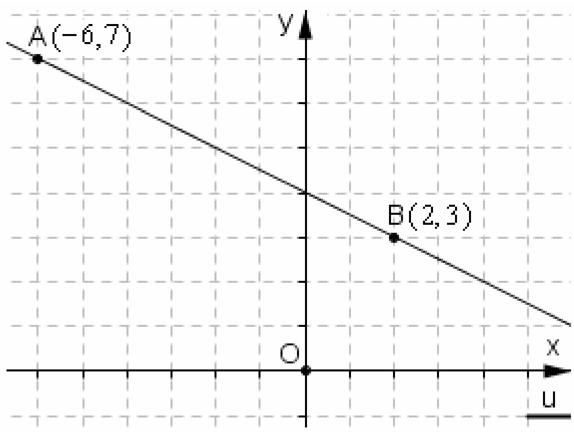
  I due punti A, B non hanno né la stessa ascissa, né la stessa ordinata: la retta AB non è parallela né all'asse *y*, né all'asse *x*, e possiamo utilizzare la formula.

  $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; $\quad \dfrac{y - 7}{3 - 7} = \dfrac{x + 6}{2 + 6}$;

  $\dfrac{y - 7}{-4} = \dfrac{x + 6}{8}$; $\quad \dfrac{7 - y}{4} = \dfrac{x + 6}{8}$;

  $\dfrac{14 - 2y}{\cancel{8}} = \dfrac{x + 6}{\cancel{8}}$; $\quad -2y = x - 8$; $\quad 2y = -x + 8$;

  $y = \dfrac{-x + 8}{2}$; $\quad \boxed{y = -\dfrac{1}{2}x + 4}$

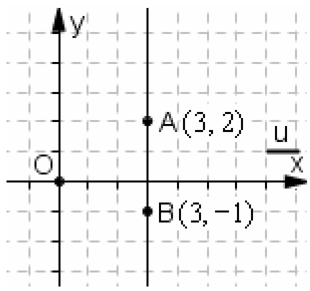


  In effetti, vediamo dalla figura che la retta è in discesa (questo va d'accordo col coefficiente angolare <0 trovato) e l'ordinata all'origine vale 4, come il "*q*" dell'equazione da noi ricavata.

- **Scrivere l'equazione della retta che passa per i due punti $A(3, 2)$; $B(3, -1)$**

  Questa volta A, B hanno la stessa ascissa, e la formula non è applicabile.
  D'altra parte se i due punti hanno la stessa ascissa, allora la retta è verticale, e la sua equazione si può scrivere immediatamente: $\boxed{x = 3}$.

  Puoi verificare che la "variante" $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$ condurrebbe, fatti i calcoli, alla stessa conclusione $x = 3$.



CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI

Supponiamo di avere, nel piano cartesiano, tre punti P_1, P_2, P_3 di coordinate $(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3)$.
Esiste una formula per stabilire se sono allineati, ossia se appartengono tutti e tre a una medesima retta?

Consideriamo l'equazione della retta passante per i primi due; scriviamola utilizzando la formula nella versione "senza denominatori", che è valida, come sappiamo, qualunque sia la posizione dei due punti considerati:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

Ora, il terzo punto apparterrà a tale retta se e solo se, sostituendone le coordinate nell'equazione, si otterrà un'uguaglianza vera (condizione di appartenenza). Dunque il terzo punto apparterrà alla retta individuata dai primi due, e perciò i tre punti saranno allineati, se e solo se

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}$$

condizione che può anche essere scritta utilizzando un determinante:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Ad esempio, utilizziamo la condizione per stabilire se i tre punti

$A(-5, 3);\ B\left(-\frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right);\ C(1, 6)$

sono allineati oppure no.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{5}+5 & \frac{27}{5}-3 \\ 1+5 & 6-3 \end{vmatrix} = 0? \quad \begin{vmatrix} \frac{24}{5} & \frac{12}{5} \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0? \quad \frac{24}{5}\cdot 3 - \frac{12}{5}\cdot 6 = 0? \quad \frac{72}{5} - \frac{72}{5} = 0, \quad OK: \textit{sono allineati}$$

ESERCIZI

1) Scrivi (portandola successivamente in forma esplicita) l'equazione della retta AB, con:

a) $A(0,4);\ B(-6,1)$ b) $A(-3,4);\ B(2,-1)$ c) $A(-3,-6);\ B(4,1)$ d) $A\left(1,\frac{1}{2}\right);\ B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$

e) $A(3,5);\ B(1,-1)$ f) $A(-1,-4);\ B(-3,2)$ g) $A\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right);\ B\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$ h) $A(1,3);\ B(1,-1)$

2) E' dato il triangolo ABC, con $A(-1,0);\ B(3,-3);\ C(-4,-6)$.
Scrivi le equazioni delle due mediane relative ai lati AB e AC (= delle *rette* su cui giacciono tali mediane), poi calcola le coordinate del loro punto di intersezione. Verifica infine che anche con la ben nota formula per le coordinate del baricentro di un triangolo si sarebbe giunti al medesimo risultato.

3) Dopo aver dimostrato che ABCD, con $A(-5,-2);\ B(5,-3);\ C(6,2);\ D(-4,3)$, è un parallelogrammo, congiungi il vertice A col punto medio M del lato DC e il vertice C con il punto medio N nel lato AB e verifica che i due segmenti AM e CN dividono la diagonale DB in tre parti uguali $DE = EF = FB$.
Verifica inoltre che il punto medio G di AE, il punto medio H di CF e il punto di intersezione I delle diagonali del parallelogrammo sono allineati fra loro.

4) Verifica, con l'apposita formula, che i tre punti $A(2,5);\ B(4,1);\ C(5,-1)$ sono allineati.
Scrivi l'equazione della retta *r* su cui giacciono.
Indica poi con *s* la retta parallela ad *r* e passante per l'origine O, considera il punto $D(2, 2)$ e determina le coordinate dei tre punti A', B', C' in cui le tre congiungenti AD, BD, CD intersecano la retta *s*.

RISPOSTE

1)

a) $y = \frac{1}{2}x + 4$ b) $y = 1 - x$ c) $y = x - 3$ d) $y = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$

e) $y = 3x - 4$ f) $y = -3x - 7$ g) $y = -x - \frac{5}{4}$ h) $x = 1$

2) $G\left(-\frac{2}{3}, -3\right)$ 3) $E(-1, 1);\ F(2, -1);\ G\left(-3, -\frac{1}{2}\right);\ H\left(4, \frac{1}{2}\right);\ I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

4) $A'(2,-4);\ B'(-2,4);\ C'(-4,8)$