15. FASCIO PROPRIO DI RETTE

❑ EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO DATO $P_0(x_0, y_0)$ E AVENTE COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO m

L'equazione della retta passante per $P_0(x_0, y_0)$ e avente coefficiente angolare assegnato m si scrive mediante la formula

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Esempio: scrivere l'equazione della retta passante per $A(5,3)$
e parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante (di equazione $y = -x$).

Avremo $m = -1$; $(x_0, y_0) = (5,3)$ e quindi, applicando la formula $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 5); \quad y - 3 = -x + 5; \quad y = -x + 8$$

La GIUSTIFICAZIONE della formula $y - y_0 = m(x - x_0)$
si può effettuare mediante le seguenti tre puntualizzazioni:

a) l'equazione scritta rappresenta certamente una retta
(per il fatto che si tratta di un'equazione di 1° grado nelle due variabili *x*, *y*);

b) tale retta ha coefficiente angolare *m*
(se si portasse in forma esplicita, il moltiplicatore di *x* risulterebbe essere *m*)

c) tale retta infine passa certamente per $P_0(x_0, y_0)$
in quanto sostituendo x_0, y_0 al posto di x e y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.

Le tre osservazioni di cui sopra dimostrano A POSTERIORI la validità della formula.
Un procedimento che, invece, consente di RICAVARE la formula stessa è il seguente.

L'equazione di una generica retta che abbia come coefficiente angolare il numero assegnato m è
$y = \boxed{m}x + q$,
con *quell' m* fissato, e *q* invece lasciato indicato, imprecisato.

Sappiamo che *q* indica l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse verticale:
a seconda del valore di *q* la retta si troverà spostata più in alto o più in basso.
Ma noi vogliamo determinare *quel* particolare valore di *q* per il quale la retta in questione risulta passare per il punto assegnato $P_0(x_0, y_0)$.
Bene! Lo troveremo imponendo la condizione di passaggio per il punto $P_0(x_0, y_0)$.
Tale condizione fornisce l'uguaglianza $y_0 = mx_0 + q$ da cui $q = y_0 - mx_0$.
La retta che ci interessa è dunque

$$y = mx + (y_0 - mx_0);$$
$$y - y_0 = mx - mx_0;$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ESERCIZIO

Dato il triangolo ABC, con $A(3,1)$; $B(5,2)$; $C(2,4)$,
trova le coordinate del piede dell'altezza relativa alla base BC.

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4-2}{2-5} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Dunque $m_{AH} = -\dfrac{1}{m_{BC}} = \dfrac{3}{2}$

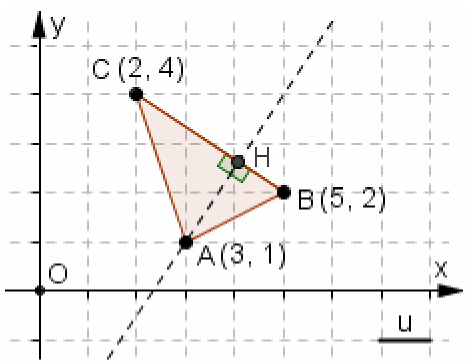
$$AH: \; y - 1 = \frac{3}{2}(x-3); \; 2y - 2 = 3x - 9; \; 3x - 2y - 7 = 0$$

$$BC: \; y - 2 = -\frac{2}{3}(x-5); \; 3y - 6 = -2x + 10; \; 2x + 3y - 16 = 0,$$

oppure con la formula per la retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}; \; \frac{y-2}{4-2} = \frac{x-5}{2-5}; \; \ldots \; 2x + 3y - 16 = 0$$

$$H = AH \cap BC: \begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 16 = 0 \end{cases}; \ldots; \; H\left(\frac{53}{13}, \frac{34}{13}\right)$$



FASCIO PROPRIO DI RETTE

Se nell'equazione

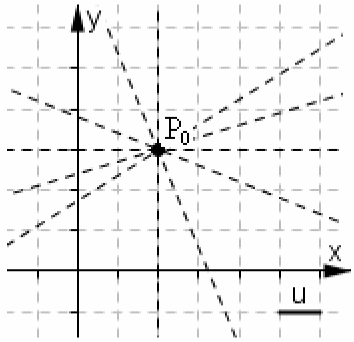
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

pensiamo x_0, y_0 fissati ed *m* variabile
(o, se si vuole, fissato ma imprecisato),
interpreteremo tale equazione come l'equazione della famiglia
di tutte le rette passanti per $P_0(x_0, y_0)$, esclusa la retta verticale.

Esempio: la famiglia di tutte le rette non verticali passanti per il punto $E(2,3)$ è rappresentata dall'equazione

$$y - 3 = m(x - 2)$$

La famiglia di tutte le rette passanti per un punto fissato P_0 viene chiamata "il fascio proprio di centro P_0".



Nella figura, alcune fra le infinite rette del fascio proprio di centro $P_0(x_0, y_0)$

Quindi possiamo dire che

L'equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ rappresenta, al variare di *m*, il FASCIO PROPRIO DI RETTE DI CENTRO $P_0(x_0, y_0)$, CON ESCLUSIONE DELLA RETTA VERTICALE

ESERCIZIO

Fra le rette del fascio di centro $S\left(4, -\frac{2}{3}\right)$, determinare:

a) quella parallela alla retta $2x + 7y - 3 = 0$
b) quella perpendicolare alla retta che passa per $A(3,5)$ e per $B(4,-1)$
c) quella che passa, oltre che per S, anche per $C(3,3)$

a) L'equazione del fascio in questione è $y + \frac{2}{3} = m(x - 4)$

Fra le rette di questo fascio, quella parallela alla $2x + 7y - 3 = 0$ sarà la retta che ha lo stesso suo coefficiente angolare.
Ricaviamo allora il coefficiente angolare di $2x + 7y - 3 = 0$, portando l'equazione in forma esplicita:

$$2x + 7y - 3 = 0; \quad 7y = -2x + 3; \quad y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}$$

Dunque il valore di *m* che ci interessa è $m = -\frac{2}{7}$,

e a questo punto la retta richiesta sarà $y + \frac{2}{3} = -\frac{2}{7}(x - 4)$

Svolti i calcoli, si ottiene $y = -\frac{2}{7}x + \frac{10}{21}$ o, in forma implicita, $6x + 21y - 10 = 0$

b) Che coefficiente angolare ha la retta AB, con $A(3,5)$ e $B(4,-1)$?

Per determinarlo, potremmo scrivere l'equazione di tale retta

con la formula per la retta passante per due punti di coordinate assegnate $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

oppure (molto più rapidamente!) servirci della formula $m = \Delta y / \Delta x$.

Dunque $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-5}{4-3} = -6$ e perciò, per quanto riguarda la retta richiesta, perpendicolare ad AB,

$m = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{6}$ da cui $y + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(x - 4)$ eccetera.

c) Possiamo scrivere, con l'apposita formula, l'equazione della retta passante per i due punti S e C;
oppure, in alternativa, fra le rette del fascio di centro S, determinare quella passante per $C(3,3)$

ponendo la condizione di appartenenza di quest'ultimo punto alla retta $y + \frac{2}{3} = m(x - 4)$.

per determinare il valore di *m* che interessa. Puoi, per esercizio, procedere tu, in entrambi i modi.

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$$

E' L' EQUAZIONE DEL FASCIO PROPRIO DI CENTRO (x_0, y_0), NESSUNA RETTA ESCLUSA

Infatti,

- l'equazione appena scritta rappresenta certamente una retta (è di 1° grado in x, y)
- tale retta passa certamente per $P_0(x_0, y_0)$
  perché sostituendo x_0, y_0 al posto di x, y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera;
- infine:
  - ♪ facendo variare la coppia di parametri a, b, si possono ottenere tutti i possibili coefficienti angolari (notare che il coefficiente angolare è dato da $-a/b$; ora, scegliendo un valore di b non nullo e facendo poi variare a, possiamo far sì che la frazione $-a/b$ assuma qualsiasi valore da noi desiderato)
  - ♫ e inoltre, ponendo $b=0$ e attribuendo ad a un valore qualsiasi purché non nullo, si ottiene la retta $a(x-x_0)=0$; $x-x_0=0$; $x=x_0$ ossia la retta verticale passante per (x_0, y_0)

Quando, in un problema, è richiesto di determinare l'equazione di una retta, di cui si conosce il passaggio per un dato punto $P_0(x_0, y_0)$, in modo che tale retta verifichi anche un'ulteriore condizione:

- se si sa già per certo che la retta cercata non è verticale,
  si utilizzerà la rappresentazione $y-y_0=m(x-x_0)$;
- se invece non è escluso che la retta cercata possa eventualmente essere verticale,
  IN TEORIA si dovrebbe utilizzare la rappresentazione
  $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
  che, contrariamente a quell'altra, non esclude la retta verticale;
  tuttavia, il fatto che qui intervengano DUE parametri anziché uno, è molto scomodo
  (teniamo presente anche il fatto che la coppia di parametri sarebbe comunque determinata "a meno di una costante di proporzionalità"), per cui si preferisce di solito comportarsi nel modo seguente:
  - ♪ si utilizza, per rappresentare la retta, la formula $y-y_0=m(x-x_0)$;
  - ♫ si va poi a controllare *in modo diretto* se anche la retta verticale $x=x_0$ è soluzione del problema assegnato.

Questa osservazione è utile in particolare in relazione del problema, che si incontra negli sviluppi successivi della Geometria Analitica, di "condurre da un dato punto le tangenti a una data conica".

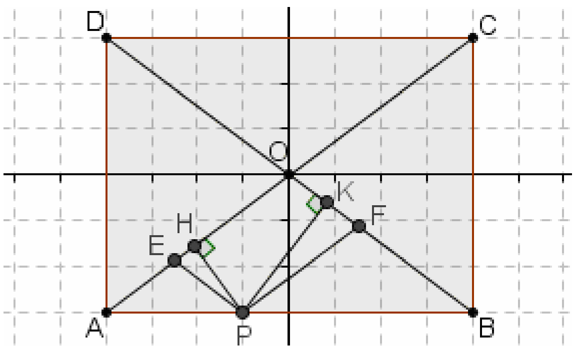
ESERCIZIO

Considera il rettangolo di vertici
$A(-4,-3)$, $B(4,-3)$, $C(4,3)$, $D(-4,3)$
e prendi sul lato AB un punto P qualsiasi,
ad esempio quello di ascissa –1: $P(-1,-3)$.
Ora per P traccia:
la parallela alla diagonale BD,
che intersechi l'altra diagonale AC in E;
la parallela ad AC,
che intersechi BD in F;
la perpendicolare ad AC,
che la intersechi in H;
e infine la perpendicolare a BD,
che la intersechi in K.
Verifica ora che la somma $PE+PF$
è uguale a mezza diagonale del rettangolo,
mentre la somma $PH+PK$ è uguale a 4,8.

Cambia ora la posizione di P su AB,
variandone l'ascissa, rifai i calcoli, e
constaterai che la somme $PE+PF$, $PH+PK$
non mutano il loro valore rispetto a prima.

Come si spiega questo fatto?

Altri esercizi a pag. 44



Le diagonali hanno equazioni $y=\frac{3}{4}x$ *(AC) e* $y=-\frac{3}{4}x$ *(BD)*

per cui, ad esempio,

la retta PE avrà equazione $y+3=m(x+1)$ *con* $m=-\frac{3}{4}$

e quindi $y+3=-\frac{3}{4}(x+1)$; $y=-\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$.

Ora per trovare le coordinate di E si porrà questa equazione a sistema con l'equazione della retta AC … ecc. ecc. Prosegui tu.

Riguardo alle dimostrazioni richieste,
per la prima è sufficiente la geometria euclidea di base,
per la seconda ci vogliono similitudini e proporzioni.