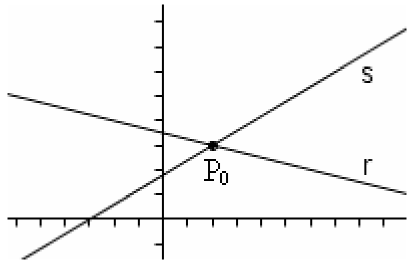
17. ANCORA SUI FASCI DI RETTE

LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE EQUAZIONI DI DUE RETTE, SE SI LASCIA INDETERMINATO UNO DEI COEFFICIENTI (O ENTRAMBI), ESPRIME UN FASCIO

Consideriamo le equazioni di due rette

$r:\ ax+by+c=0$

$s:\ a'x+b'y+c'=0$.



Supponiamo (almeno per ora) che tali due rette non siano parallele, ma si intersechino invece in un punto

$P_0(x_0,\ y_0)$.

Riguardo ora alla scrittura

$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$,

dove k è un coefficiente reale, possiamo dire che

♪ esprime ancora l'equazione di una retta, perché è di 1° grado nelle variabili x, y

♫ e questa retta passa senz'altro per $P_0(x_0,\ y_0)$!!!

Infatti P_0, poiché appartiene sia ad r che ad s,
è tale che le sue coordinate $(x_0,\ y_0)$ soddisfano sia all'equazione di r che a quella di s;
si ha perciò $ax_0+by_0+c=0$ e anche $a'x_0+b'y_0+c'=0$,
per cui si avrà pure, per qualsiasi valore di k, $ax_0+by_0+c+k(a'x_0+b'y_0+c')=0$
il che significa appunto che $P_0(x_0,\ y_0)$ appartiene alla retta $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$.

Ricapitolando, l'equazione

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

individua senz'altro una retta appartenente al fascio di centro $P_0(x_0,\ y_0)$.

Facciamo un esempio. Le due rette

$$r:\ x-3y+5=0,\quad s:\ 2x+y-4=0$$

si intersecano, come tu stesso puoi verificare facendo il sistema, nel punto $P_0(1,\ 2)$. Ora,

$$x-3y+5+k(2x+y-4)=0$$

è ancora l'equazione di una retta, passante per $P_0(1,\ 2)$.
Se prendiamo, tanto per dire, $k=7$, la specifica retta sarà

$$x-3y+5+7(2x+y-4)=0$$
$$x-3y+5+14x+7y-28=0$$
$$15x+4y-23=0$$

e questa retta passa per $(1,\ 2)$ in quanto, con la sostituzione $x=1,\ y=2$, l'uguaglianza risulta vera:

$$15\cdot 1+4\cdot 2-23=0;\quad 15+8-23=0\ \ OK$$

Ci chiediamo adesso: ma … la scrittura in esame

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

è in grado di esprimere, scegliendo in maniera opportuna il valore da assegnare a k, QUALSIASI retta del fascio in questione, oppure no?

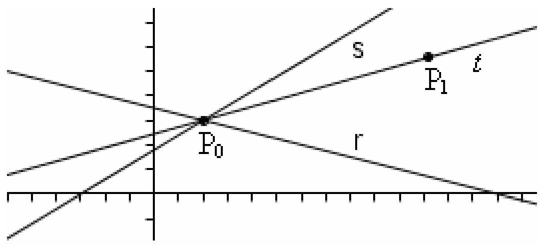
Possiamo rispondere a questa domanda provando a indagare se, preso un qualsivoglia punto $P_1(x_1,\ y_1)$ del piano, sia sempre possibile trovare un valore di k per il quale la retta corrispondente passi per P_1.
Dunque: la retta

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

passerà per $P_1(x_1,\ y_1)$ se e solo se

$$ax_1+by_1+c+k(a'x_1+b'y_1+c')=0$$
$$k(a'x_1+b'y_1+c')=-(ax_1+by_1+c)$$
$$k=-\frac{ax_1+by_1+c'}{a'x_1+b'y_1+c'}$$

(*purché sia* $a'x_1+b'y_1+c\neq 0$, *altrimenti il valore di* k *non esiste*).



$r:\ ax+by+c=0$
$s:\ a'x+b'y+c'=0$
$t:\ ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$

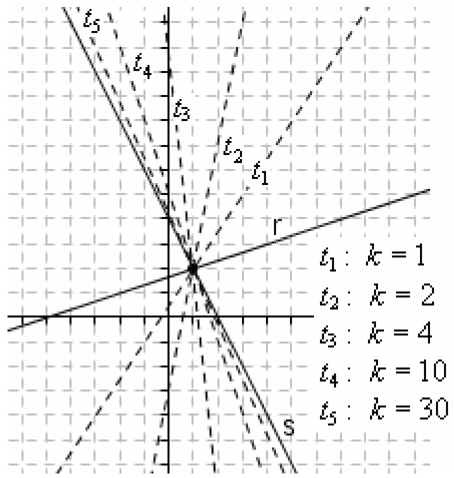
Ma allora … sarà possibile determinare un valore di k tale che la retta $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ passi per $P_1(x_1,\ y_1)$, se e soltanto se risulta $a'x_1+b'y_1+c\neq 0$, ossia se e soltanto se il punto P_1 NON appartiene alla retta $s:\ a'x+b'y+c'=0$!!!

Di conseguenza l'equazione $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
permette di rappresentare, al variare di *k*, *quasi tutte* le rette del fascio di centro P_0, ma *non proprio tutte*.
Resta esclusa infatti ogni retta P_0P_1, tale che il punto P_1 appartenga alla retta *s* …
… e allora, a ben pensarci, *resta esclusa la sola retta s*!

In realtà, si può osservare che, quanto più si prendono valori di *k* grandi, tanto più la retta rappresentata dall'equazione
$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$
tende a identificarsi con la retta *s*.

Ad esempio, nella figura qui a fianco, abbiamo preso
$$r:\ x-3y+5=0,\quad s:\ 2x+y-4=0$$
e abbiamo poi considerato altre rette $t_1, t_2, t_3, ...$ ottenute considerando l'equazione
$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$
e assegnando a *k* valori crescenti.

L'idea che ci facciamo è che …
la retta $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$
potrebbe andare a identificarsi con la retta *s* ..
… solo se *k* potesse raggiungere il valore "infinito"!



RIASSUNTO: FASCIO PROPRIO INDIVIDUATO DA DUE RETTE

Date le equazioni di due rette $r:\ ax+by+c=0,\quad s:\ a'x+b'y+c'=0$ incidenti in $P_0(x_0, y_0)$:

- la scrittura
  $$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \quad (k\in\mathbb{R})$$
  indica, al variare di *k*, tutte le rette del fascio proprio cui appartengono *r* ed *s*, con la sola eccezione di *s*.
  Si ottiene la retta *r* con $k=0$, si ottiene una retta *prossima* a *s* con *k* tendente a infinito ($k\to\infty$).

- e la scrittura
  $$\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0 \quad (\lambda, \mu\in\mathbb{R}, \textit{non entrambi nulli})$$
  indica, al variare dei parametri, tutte le rette (nessuna esclusa) del fascio proprio di cui fanno parte *r* ed *s*.
  La retta *r* si ottiene con la combinazione $\lambda\neq 0, \mu=0$
  La retta *s* si ottiene con la combinazione $\lambda=0, \mu\neq 0$

ANALOGAMENTE, PER IL FASCIO IMPROPRIO …

Date le equazioni di due rette $r:\ ax+by+c=0,\quad s:\ a'x+b'y+c'=0$ parallele fra loro:

- la scrittura
  $$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \quad (k\in\mathbb{R})$$
  indica, al variare di *k*, tutte le rette del fascio improprio cui appartengono *r* ed *s*, con la sola eccezione di *s*.
  Si ottiene la retta *r* con $k=0$, si ottiene una retta prossima a *s* con *k* tendente a infinito ($k\to\infty$).

- e la scrittura
  $$\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0 \quad (\lambda, \mu\in\mathbb{R}, \textit{non entrambi nulli})$$
  indica, al variare dei parametri, tutte le rette (nessuna esclusa) del fascio improprio di cui fanno parte *r* ed *s*.
  La retta *r* si ottiene con la combinazione $\lambda\neq 0, \mu=0$
  La retta *s* si ottiene con la combinazione $\lambda=0, \mu\neq 0$

UNIFICANDO LE DUE SITUAZIONI

In definitiva, date due *qualsiasi* rette $r:\ ax+by+c=0,\quad s:\ a'x+b'y+c'=0$,
il fascio (proprio od improprio) da esse individuato si può indicare

- con $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \quad (k\in\mathbb{R})$
- o con $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0 \quad (\lambda, \mu\in\mathbb{R}, \textit{non entrambi nulli})$

La seconda scrittura non esclude nessuna retta del fascio,
la prima scrittura ha il vantaggio di contenere un parametro solo ma esclude la retta *s*,
la quale corrisponde ad una situazione "limite" di *k* "estremamente grande":
per così dire, si otterrebbe con $k=\infty$.

ESERCIZIO SVOLTO

Verifica che l'equazione

$$(1+a)x = a(y+1)$$

rappresenta, al variare di *a*, un fascio di rette, con l'eccezione di una singola retta.
Determina le caratteristiche del fascio e individua la retta mancante.

Risoluzione

$(1+a)x = a(y+1);\;\; x+ax = ay+a;\;\; x+ax-ay-a=0;\;\; x+a(x-y-1)=0$

Si tratta dunque del fascio individuato dalle due rette $x=0$ (*asse* y) e $x-y-1=0$.
Quest'ultima è la "retta mancante": l'equazione rappresenta tutte le rette del fascio, tranne la $x-y-1=0$.

Poiché il sistema $\begin{cases} x=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ ha come soluzione la coppia $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, il fascio è proprio, con centro in $(0,1)$.

ESERCIZIO SVOLTO

Stabilisci le caratteristiche dei due fasci seguenti, e determina la retta che essi hanno in comune.

$F_1:\; y-1 = m(x-1)$

$F_2:\; a(2x+y+1)+b(4x+2y+1)=0$

Risoluzione

$F_1:\; y-1=m(x-1)$ è il fascio di tutte le rette passanti per il punto $(1,1)$, privato della retta verticale.

$F_2:\; a(2x+y+1)+b(4x+2y+1)=0$ è il fascio (nessuna retta esclusa) individuato dalle due rette $2x+y+1=0$ e $4x+2y+1=0$.
Poiché queste sono parallele fra loro, si tratta di un fascio improprio: il fascio delle rette aventi $m=-2$.

La retta che i due fasci in questione hanno in comune è, fra le rette di equazione $y-1=m(x-1)$, quella di coefficiente angolare -2 ossia la $y-1=-2(x-1);\;\; y=-2x+3$

ESERCIZI

1) Determina le caratteristiche (proprio o improprio, rette generatrici, eventuale centro, eventuali rette escluse) di ciascuno dei fasci seguenti:

a) $(2k+1)x-(k+2)y-6(k+1)=0$ b) $3(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y=0$ c) $h(x-y)=k(x-y+1)$

d) $(4h+3)x-(h+1)y=2$ e) $y=\dfrac{x-y+4}{a}+2x$ f) $(1+b)(x+3y)+2(3+b)=0$

2) Spiega perché la seguente equazione NON rappresenta, al variare di *k*, tutto un fascio di rette, ma solo una parte di un fascio. Quali sono le rette escluse? $y=k^2x+3(x-2)$

3) Determina la retta comune alla seguente coppia di fasci:

a) il fascio generato dalle due rette $5x-2y+4=0,\; 2x-5y-4=0$
e quello generato dalle due rette $x+y+3=0,\; 2x-y=0$

b) $2x+3y+11+a(3x-y)=0,\; a\in\mathbb{R}$ e $x+(b+1)y+b=0,\; b\in\mathbb{R}$

RISPOSTE

1)

a) Fascio proprio generato da $r: x-2y-6=0$ e $s: 2x-y-6=0$, di centro $(2,-2)$, privato della retta *s*

b) Fascio proprio di centro l'origine (generatrici: $y=3x,\; y=-3x$), nessuna retta esclusa.

c) Fascio improprio delle rette parallele alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (generatrici: $x-y=0,\; x-y+1=0$), nessuna retta esclusa.

d) Fascio proprio generato da $r: y=3x-2$ e $s: y=4x$, di centro $(-2,-8)$, privato della retta *s*

e) Fascio proprio generato da $r: y=x+4$ e $s: y=2x$, di centro $(4,8)$, privato però sia di *r* che di *s*

f) Fascio improprio delle rette di coeff. ang. $m=-1/3$ (generatrici: $x+3y+6=0,\; x+3y+2=0$) privato della retta $x+3y+2=0$

2) L'equazione si può portare sotto la forma $y=(k^2+3)x-6$ e dunque rappresenta le rette per $(0,-6)$ ma solo quelle di coefficiente angolare ≥ 3 (ed esclusa anche quella verticale)

3) a) $y=-2x-4$ b) $y=x-2$