

20. DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

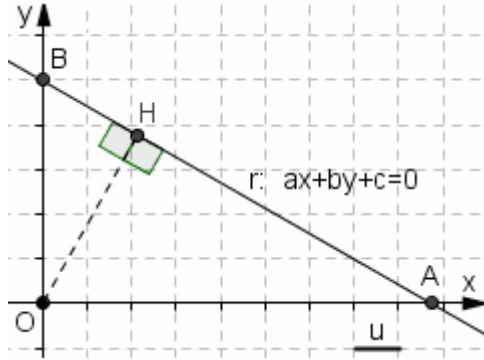
Tramite un cambiamento di riferimento per traslazione degli assi saremo ora in grado di ricavare un'importante formula della Geometria Analitica: la formula per la distanza di un punto da una retta.

DAPPRIMA SI DETERMINA LA FORMULA IN UN CASO PARTICOLARE:

si suppone che il punto assegnato sia l'origine.

Indichiamo con $r: ax + by + c = 0$ la retta in questione.

Con riferimento alla figura, $d(O, r) = OH$ è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AOB, nel quale A, B sono le intersezioni di r , rispettivamente con l'asse x e con l'asse y .



$$A: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{c}{a} \quad (a \neq 0) \\ y = 0 \end{cases} \quad A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

$$B: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{c}{b} \quad (b \neq 0) \\ y = 0 \end{cases} \quad B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$$

$$OA = \left| -\frac{c}{a} \right| = \left| \frac{c}{a} \right|; \quad OB = \left| -\frac{c}{b} \right| = \left| \frac{c}{b} \right|$$

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2 + \left(-\frac{c}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^2c^2 + a^2c^2}{a^2b^2}} = \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2}} = \left| \frac{c}{ab} \right| \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OH = \frac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{\left| \frac{c}{a} \right| \cdot \left| \frac{c}{b} \right|}{\left| \frac{c}{ab} \right| \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Abbiamo così trovato che la distanza dell'origine dalla retta $r: ax + by + c = 0$ è data dalla formula

$$(1) \quad d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Si può osservare a posteriori che la formula, ricavata sotto l'ipotesi $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, conserva la sua validità anche nei due casi $a = 0$; $b = 0$)

SUCCESSIVAMENTE, CI SI PONE NEL CASO GENERALE.

Si desidera determinare la distanza del punto $P_0(x_0, y_0)$ dalla retta $r: ax + by + c = 0$: insomma, ora il nostro punto non è più necessariamente l'origine. Ma noi ci ricondurremo al caso particolare già esaminato, tramite un cambiamento di riferimento che porti l'origine in $P_0(x_0, y_0)$!

Scriviamo l'equazione della retta $r: ax + by + c = 0$ nel nuovo riferimento.

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

$$ax + by + c = 0 \rightarrow a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c = 0; \quad aX + ax_0 + bY + by_0 + c = 0; \quad \boxed{aX + bY + \underbrace{ax_0 + by_0 + c}_{\text{TERMINE NOTO}} = 0}$$

Nel riferimento XP_0Y , il punto di cui ci stiamo occupando è l'origine: possiamo perciò applicare la precedente formula (1) ottenendo:

$$d = d(P_0, r) = \frac{|\text{TERMINE NOTO}|}{\sqrt{(\text{coeff. di } X)^2 + (\text{coeff. di } Y)^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{Concludendo}$$

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

FORMULA PER LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

ESERCIZIO Serviti della formula per calcolare un'altezza e poi l'area di ABC, con $A(3,1)$; $B(5,2)$; $C(2,4)$. (Risultato: $area = 7/2$)

Altri esercizi a pag. 49

